

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. М. Львовский

Лекции по математическому анализу

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 517
ББК 22.161
Л89

Львовский С. М.

Л89 Лекции по математическому анализу. — М.: МЦНМО, 2008. — 296 с.

ISBN 978-5-94057-438-5

Книга представляет собой записки продвинутого курса анализа, прочитанного автором в 2006/07 годах в Независимом московском университете. В курсе на раннем этапе вводится понятие гладкого многообразия и уделяется много внимания векторным полям, дифференциальным формам, ориентациям и прочему материалу, лежащему между курсами анализа и дифференциальной геометрии. Из менее традиционных тем отметим пример Уитни и доказательство (в ослабленном варианте) теоремы регулярности для эллиптических систем.

ББК 22.161

Сергей Михайлович Львовский

Математический анализ

Подписано в печать 15.10.2008 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 18.5. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-94057-438-5

© Львовский С. М., 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой записки трехсеместрового курса анализа, прочитанного автором в 2006/07 годах (а до этого — в 1999/2000) в Независимом московском университете. Текст довольно точно соответствует второй версии курса, но разбиение текста на «лекции» не всегда соответствует разбиению курса на устные лекции.

В соответствии с традициями Независимого университета в курсе на раннем этапе вводится понятие гладкого многообразия и уделяется много внимания векторным полям, дифференциальным формам, ориентациям — одним словом, тому материалу, который кто-то (Д. В. Аносов?) назвал «ничьей землей, лежащей между курсами анализа и дифференциальной геометрии». Благодаря тому, что в 2006 году набор студентов оказался на редкость сильным даже по меркам НМУ, в курс удалось включить кое-что и из тех разделов анализа, на которые в НМУ времени обычно не хватает: меру и интеграл Лебега, распределения (обобщенные функции), преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$. Из менее традиционных тем отметим пример Уитни, демонстрирующий нарушение теоремы Сарда при недостаточной гладкости, а также доказательство (в ослабленном варианте) теоремы регулярности для эллиптических систем.

Схему изложения теории пределов, использованную в курсе, я узнал от Ю. М. Бурмана; она, видимо, не идеальна, но никак не хуже «предела по базе» (читай: предела базиса фильтра) и представляет собой, видимо, разумный компромисс. Теория интеграла Римана в курсе не излагается: для нужд первого семестра достаточно интегралов от кусочно-непрерывных функций, что проще сделать с помощью «интеграла Коши», а второй семестр начинается уже с интеграла Лебега; такой подход к построению курса анализа был, как известно, предложен Ж. Дьедонне. При изложении нужного нам частного случая теоремы Уитни о продолжении я следовал книге Б. Мальгранжа «Идеалы дифференцируемых функций», а при изложении теории меры — учебнику У. Рудина (W. Rudin) «Real and Complex Analysis».

Я глубоко благодарен Ю. М. Бурману, М. Н. Вялому и В. В. Доценко, без тесного сотрудничества с которыми курсы бы не состоялись; я благодарю также С. С. Анисова, С. М. Архипова, В. О. Бугаенко, С. А. Дориченко, С. Ю. Немировского, А. В. Ошмян, М. З. Ровинского и А. Шеня. М. Г. Быкова обнаружила много прекрасных ошибок и опечаток в записках лекций, на которых основана эта книга.

Требования к подготовке читателя

Математический анализ на первом курсе НМУ излагается, как правило, не «с нуля»; не является исключением и эта книга. Для ее чтения необходимо знакомство с началами анализа в объеме программы сильной математической школы. Более конкретно, помимо знания школьного курса от читателя требуется следующее:

- знать ε - δ определение предела и его простейшие следствия («предел суммы равен сумме пределов» и т. п.);
- знать (без доказательства) какой-нибудь из «принципов полноты для действительных чисел» (например, теорему о стягивающихся отрезках);
- быть знакомым с признаками сходимости числовых рядов;
- быть знакомым с теоретико-множественной терминологией и обозначениями ($\cap$, $\cup$, понятие отображения. . .);
- иметь интуитивное представление об интеграле как площади под графиком функции и знать формулу Ньютона—Лейбница.

Начиная со второго семестра предполагается, что читатель знаком с элементарной линейной алгеброй; в третьем семестре предполагается знакомство с фундаментальной группой и накрытиями, а также (что менее существенно) с понятиями кольца и идеала. В НМУ эти сведения сообщаются студентам в течение первого учебного года в курсах алгебры, геометрии и топологии.

В заключение призываю читателей сообщать мне обо всех неточностях, опечатках и ошибках по адресу lvovski@gmail.com.

С. Львовский

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Первый семестр	7
1. Топологические пространства	7
2. Непрерывность и пределы	12
3. Действительные числа	15
4. Компактность	22
5. Связность; пополнение	28
6. p -адические числа	33
7. Канторово множество	38
8. Производная	45
9. Равномерная сходимости; равномерная непрерывность	51
10. Интеграл	55
11. Ряды	61
12. Аналитические функции	67
13. Элементарные функции	80
Задачи к первому семестру	87
Второй семестр	101
14. Мера Лебега на $\mathbb{R}$	101
15. Интеграл Лебега	107
16. Произведение мер; мера Лебега на $\mathbb{R}^n$	116
17. Производная	125
18. Высшие производные	133
19. Теорема об обратной функции	136
20. Теорема о неявной функции	141
21. Теорема Арцела—Асколи и дифференциальные уравнения	147
22. Замена переменных в интеграле	154
23. Теорема Сарда	159
24. Пример Уитни	165
Задачи ко второму семестру	174
Третий семестр	184
25. Многообразия и касательные пространства	184
26. Касательные векторы, локальные кольца и векторные поля	192
27. Фазовые кривые и фазовые потоки	204

28. Интегрирование плотностей	210
29. Дифференциальные формы	215
30. Интегрирование форм по цепям	222
31. Интегрирование форм по многообразиям	228
32. Два слова о когомологиях де Рама	237
33. Теорема Фробениуса	242
34. Пространства L^1 и L^2	248
35. Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$: формула обращения	256
36. Преобразование Фурье: дальнейшие свойства	261
37. Распределения, они же обобщенные функции	267
38. Пространства Соболева	272
39. Эллиптические операторы	278
Задачи к третьему семестру	287

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

1. Топологические пространства

В школьном курсе вам объясняли (по крайней мере, на интуитивном уровне), что такое предел, непрерывная функция и действительное число. В продвинутых курсах анализа определяются общие понятия предела и непрерывности, а также строится строгая теория действительных чисел. Построением этой последней теории мы займемся не прямо сейчас, а на третьей лекции, но пользоваться (в примерах) множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел начнем сразу (порочного круга, как вы убедитесь, при этом не возникнет).

Вот первый шаг к общим понятиям непрерывности и предела.

Определение 1.1. *Топологическим пространством* называется множество X , в котором выделено семейство подмножеств, называемых *открытыми*, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) само пространство X и пустое подмножество $\emptyset$ являются открытыми множествами;
- (2) объединение любого семейства открытых множеств открыто;
- (3) пересечение двух открытых множеств открыто.

Начнем с того, что введем топологию на самом множестве $\mathbb{R}$.

Пример 1.2 (стандартная топология на $\mathbb{R}$). Назовем подмножество $U \subset \mathbb{R}$ открытым, если для каждой точки $x \in U$ существует такое (действительное) число $\varepsilon > 0$, что все y , удовлетворяющие условию $|y - x| < \varepsilon$, также лежат в U .

Неформально говоря, множество открыто, если вместе с каждой точкой оно обязательно содержит и все достаточно близкие к ней. Проверьте самостоятельно, что при таком определении открытых множеств аксиомы 1—3 топологического пространства действительно выполнены.

Если на множестве X задана топология, то она задана и на всяком его подмножестве.

Определение 1.3. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество. Введем на Y топологию, объявив его открытыми подмножествами все множества вида $U \cap Y$, где U — открытое подмно-

жество пространства X . Получающаяся топология называется топологией на Y , *индуцированной* топологией на X .

Тривиально проверяется, что набор подмножеств в Y , построенный в соответствии с этим определением, удовлетворяет аксиомам открытых множеств топологического пространства. В частности, снабженным топологией оказывается любое подмножество в $\mathbb{R}$.

Вот еще один пример топологического пространства.

Пример 1.4 (дискретная топология). Пусть X — произвольное множество. Объявим *все* его подмножества открытыми. Тогда, очевидно, аксиомы топологического пространства будут выполнены. Такое топологическое пространство называется *пространством с дискретной топологией*.

Ввиду аксиомы 2 топологических пространств, для дискретности пространства достаточно, чтобы все его одноточечные подмножества были открыты.

Сами по себе дискретные топологии неинтересны, но такое топологическое пространство может возникнуть в результате проведения какой-то конструкции, и вот на этот случай полезно иметь для него специальный термин.

Пример 1.5. Пусть $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ — множество целых чисел (обозначение $\mathbb{Z}$ является стандартным). Тогда стандартная топология на $\mathbb{R}$ индуцирует на $\mathbb{Z}$ дискретную топологию.

Много разумных примеров топологических пространств получается из следующей конструкции.

Определение 1.6. *Метрическим пространством* называется множество X , на парах точек которого задана функция ρ (с вещественными значениями), удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $\rho(x, y) \geq 0$ для любых x и y , и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Величина $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между x и y , а сама функция ρ часто называется *метрикой*.

Пример метрического пространства — множество $\mathbb{R}$, в котором метрика задана формулой $\rho(x, y) = |x - y|$. Другой пример — пространство (или плоскость), в котором ρ — обычное расстояние между точками. В этих примерах аксиома 3 сводится к обычному «неравенству

треугольника»; в общем случае ее тоже называют неравенством треугольника.

Коль скоро X — метрическое пространство, на любом подмножестве $Y \subset X$ функция ρ также индуцирует метрику, так что любое подмножество метрического пространства автоматически является метрическим пространством.

Рассмотрим дальнейшие примеры. Пусть $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел («координат») $(x_1, \dots, x_n)$; это множество называется *n -мерным координатным пространством* (или просто *n -мерным пространством*, если не грозит путаница). При $n = 2$ это плоскость, при $n = 3$ — «обычное» (трехмерное) пространство. На $\mathbb{R}^n$ можно ввести (среди прочих) такие метрики.

L^p -метрика: зафиксируем вещественное число $p \geq 1$; если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, то положим $\rho_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}$.

L^∞ -метрика: если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, то положим $\rho_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|)$.

Для L^1 - и L^∞ -метрик проверка аксиом метрического пространства тривиальна. Для L^p -метрики при $p > 1$ доказательство неравенства треугольника немного сложнее; см. задачу 1.67.

На каждом метрическом пространстве можно естественным способом ввести топологию.

Обозначение 1.7. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ ; тогда для точки $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ положим

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X: \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Множество $B_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* с центром x и радиусом ε .

Определение 1.8. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется *открытым*, если для всякой точки $x \in U$ существует открытый шар с центром в x , содержащийся в U (т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$).

Очевидно, что так определенный набор открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства; проверьте также, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством, и тем самым такое употребление слова «открытый» не является двусмысленным (для этого придется воспользоваться неравенством треугольника). Проверьте, наконец, что топология, задаваемая на $\mathbb{R}$ метрикой, совпадает со стандартной топологией.

Различные метрики могут задавать одну и ту же топологию на данном множестве X . Вот важный пример.

Пример 1.9. Все L^p -метрики ($1 \leq p \leq \infty$) задают на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию.

Доказательство. Легко видеть, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\rho_\infty(x, y) \leq \rho_p(x, y) \leq n^{1/p} \cdot \rho_\infty(x, y).$$

Из этого неравенства вытекает, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ и всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$B_{\varepsilon, \rho_p}(x) \subset B_{\varepsilon, \rho_\infty}(x) \subset B_{n^{1/p}\varepsilon, \rho_p}(x),$$

так что подмножество в $\mathbb{R}^n$ является открытым относительно L^p -метрики, где $p < \infty$, тогда и только тогда, когда оно открыто относительно L^∞ -метрики. $\square$

Чтобы задать на множестве топологию, не обязательно перечислять все открытые множества. Часто используется следующий способ.

Определение 1.10. *Базой открытых множеств* на множестве X называется семейство его подмножеств, обладающее следующим свойством: если $V_1 \subset X$ и $V_2 \subset X$ принадлежат базе, то $V_1 \cap V_2$ является объединением некоторого (может быть, бесконечного) семейства множеств из базы.

Если на множестве X задана база открытых множеств, то *топология, заданная с помощью этой базы* определяется так: открытыми множествами объявляются подмножества $U \subset X$, представимые в виде объединения некоторого (возможно, бесконечного) семейства множеств из базы, а также $\emptyset$ и всё X .

Проверьте самостоятельно, что описанная конструкция действительно задает топологию на X . В метрическом пространстве X с метрикой ρ множества вида $B_\varepsilon(x)$ при всевозможных $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ образуют базу открытых множеств, для топологии, заданной метрикой. Более того, достаточно рассматривать только множества $B_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon < 1$ (или, скажем, $\varepsilon < 1/2006$): они также образуют базу открытых подмножеств, и эти базы задают все ту же топологию.

Проверьте также, что стандартную топологию на $\mathbb{R}$ можно задать с помощью базы открытых множеств вида $(p; q)$, где p и q — рациональные числа.

Приведем пример, в котором топология задается без помощи метрики.

Пример 1.11 (треугольники на плоскости). Пусть T — множество треугольников на плоскости (мы рассматриваем треугольник просто как геометрическую фигуру, без учета порядка вершин). Введем на нем топологию. Как водится, подмножество $U \subset T$ будет открытым если, неформально говоря, вместе с каждым треугольником оно содержит все «близкие» к нему. Формализуется это следующим образом. Для каждого треугольника $\Delta \in T$ и каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество $U(\Delta, \varepsilon) \subset T$, состоящее из всех треугольников Δ' , обладающих следующим свойством: вершины треугольников Δ и Δ' можно занумеровать так, что расстояния между вершинами треугольников Δ и Δ' с одинаковыми номерами будут все меньше ε . Проверьте самостоятельно, что множества вида $U(\Delta, \varepsilon) \subset T$ образуют базу открытых подмножеств; определяемая ей топология — это и есть та топология на пространстве треугольников, которую мы хотели ввести.

Вот еще одно простое, но фундаментальное определение.

Определение 1.12. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus F \subset X$ открыто.

Следующее утверждение мгновенно вытекает из определения 1.1.

Предложение 1.13. Пусть X — топологическое пространство. Тогда:

- (1) само пространство X и пустое подмножество $\emptyset$ являются замкнутыми множествами;
- (2) пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто;
- (3) объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

Определение 1.14. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда *замыканием* множества M называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M .

Замыкание множества M обычно обозначается $\bar{M}$. Ввиду пункта (2) предыдущего предложения замыкание любого множества будет замкнуто.

Неформальный смысл понятия замыкания таков: при переходе от множества M к его замыканию $\bar{M}$ мы добавляем к множеству M все те точки x , которые сами в M не лежат, но, тем не менее, «сколь угодно близко от x » точки множества M имеются; если таких точек x не найдется, то множество M является замкнутым.

Точный смысл предыдущему абзацу придает следующее

Предложение 1.15. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда $\bar{M}$ состоит из всех точек $x \in X$, обладающих следующим свойством:

для всякого открытого подмножества $U \ni x$ имеем $U \cap M \neq \emptyset$. (*)

Доказательство. Пусть $x \in \bar{M}$; по определению, это равносильно тому, что для всякого замкнутого множества $F \supset M$ имеем $x \in F$. Поскольку замкнутые множества — это дополнения открытых, последнее условие можно, обозначая $U = X \setminus F$, переписать так: для всякого открытого подмножества $U \subset X$ такого, что $U \cap M = \emptyset$, имеем $x \notin U$, или, эквивалентно: если открытое множество U содержит x , то $U \cap M \neq \emptyset$. Но это и есть условие (*). $\square$

Закончим эту лекцию еще одним важным определением.

Определение 1.16. Пусть X — топологическое пространство и $x \in X$. *Окрестностями* точки x называются открытые множества, содержащие x .

Предложение 1.17. Пусть X — топологическое пространство; подмножество в X является открытым тогда и только тогда, когда вместе с каждой точкой оно содержит какую-то ее окрестность.

Доказательство. Если множество вместе с каждой своей точкой x содержит ее окрестность U_x , то оно является объединением этих U_x и тем самым открыто как объединение открытых множеств. Если же, напротив, множество открыто, то оно является окрестностью каждой из своих точек. $\square$

2. Непрерывность и пределы

В этой лекции также нет ни одной трудной теоремы, но зато много важных определений.

Определение 2.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение топологических пространств. Отображение f называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для всякой окрестности $V \ni f(x)$ существует такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset V$.

Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Предложение 2.2. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для

всякого открытого подмножества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V) \subset X$ также открыт.

Доказательство. «Только тогда»: пусть $V \subset Y$ открыто, и пусть $x \in f^{-1}(V)$. Так как f непрерывна в точке x , согласно определению 2.1 найдется такое открытое подмножество $U_x \subset X$, что $U_x \ni x$ и $f(U_x) \subset V$ — иными словами, $U_x \subset f^{-1}(V)$. Стало быть, множество $f^{-1}(V)$ вместе с каждой точкой x содержит ее окрестность U_x и тем самым открыто.

«Тогда»: пусть прообразы всех открытых множеств открыты; чтобы показать, что f непрерывна в каждой точке $x \in X$, достаточно заметить, что если $V \ni f(x)$ открыто, то множество $U = f^{-1}(V)$ открыто, содержит x , и $f(U) \subset V$. $\square$

Важный частный случай непрерывных отображений — гомеоморфизмы.

Определение 2.3. Пусть X и Y — топологические пространства; отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.

Топологические пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными*.

Из определений очевидно, что взаимно однозначное непрерывное отображение является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно переводит открытые множества в открытые. Если отождествить топологические пространства X и Y , между которыми существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$, с помощью отображения f , то окажется, что открытые множества у них одни и те же, так что в каком-то смысле это «одно и то же» пространство.

Определение предела совершенно аналогично определению непрерывности.

Определение 2.4. Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$, и f — отображение из X в Y или из $X \setminus \{a\}$ в Y . Говорят, что точка $b \in Y$ является *пределом f при x , стремящемся к a* , если функция $\tilde{f}: X \rightarrow Y$, определенная по правилу

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a; \\ b, & z = a \end{cases}$$

является непрерывной в точке a . Обозначение: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Иными словами, $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если для всякой окрестности $U \ni b$ существует такая окрестность $V \ni a$, что $f(V \setminus \{a\}) \subset U$.

В эту же схему вписывается и предел последовательности. Именно, положим $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и введем на $\tilde{\mathbb{N}}$ топологию, в которой подмножество $U \subset \tilde{\mathbb{N}}$ открыто тогда и только тогда, когда оно либо содержит ∞ и все натуральные числа, начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$, либо не содержит ∞ .

Последовательность точек $a_n \in X$, где X — топологическое пространство — не что иное, как функция $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, для которой $f(n) = a_n$. Если теперь отождествить $\mathbb{N}$ и $\tilde{\mathbb{N}} \setminus \{\infty\}$, то определение 2.4 применимо и к этому случаю, и последовательность $\{a_n\}$ сходится к a , если для всякой окрестности $U \ni a$ существует такое $N > 0$, что при всех $n \geq N$ имеем $a_n \in U$ — в полном согласии с обычным определением предела последовательности.

Как известно, если предел числовой последовательности или функции существует, то он единствен. Для наших общих определений аналогичный факт верен не всегда (глупый пример: если в топологическом пространстве X открытыми являются только пустое множество и все X — что аксиомами топологического пространства не запрещено, — то всякая точка $x \in X$ будет пределом всякого отображения в X). Чтобы отсеять такую патологию, введем следующий важный класс топологических пространств.

Определение 2.5. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют такие открытые подмножества $U \ni x$ и $V \ni y$, что $U \cap V = \emptyset$.

Сразу же заметим, что всякое метрическое пространство хаусдорфово: в качестве открытых множеств $U \ni x$ и $V \ni y$ можно взять открытые шары $B_{d/2}(x)$ и $B_{d/2}(y)$, где d — расстояние между x и y (то, что они не пересекаются, следует из неравенства треугольника).

Все топологические пространства, с которыми мы будем иметь дело в курсе, будут хаусдорфовыми. Нехаусдорфовы пространства в жизни тоже встречаются (например, они существенно используются в алгебраической геометрии).

Определение 2.6. Пусть X — топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется *изолированной*, если множество $\{x\}$ открыто.

Неформально говоря, точка изолирована, если «поблизости от нее» других точек нет. Например, пространство дискретно тогда и только тогда, когда все его точки изолированы.

Предложение 2.7. Пусть X и Y — топологические пространства; предположим, что пространство Y хаусдорфово и что $a \in X$ — не-

изолированная точка. Тогда для всякого отображения $f: X \setminus \{a\} \rightarrow Y$ предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ единствен (если он существует).

Доказательство. Пусть, от противного, пределами $f(x)$ при x , стремящемся к a , будут две разные точки b_1 и b_2 . Поскольку Y хаусдорфово, в нем существуют непересекающиеся открытые множества $V_1 \ni b_1$ и $V_2 \ni b_2$. Согласно определению предела, в пространстве X существуют такие открытые подмножества U_1 и U_2 , содержащие a , что $f(U_1 \setminus \{a\}) \subset V_1$ и $f(U_2 \setminus \{a\}) \subset V_2$. Так как точка a неизолирована, открытое множество $U_1 \cap U_2$ содержит по крайней мере одну точку $a' \neq a$. Тогда $f(a') \in V_1 \cap V_2$, что противоречит тому, что V_1 и V_2 не пересекаются. $\square$

Многие (но не все!) топологические пространства, встречающиеся в анализе, являются метрическими (точнее говоря, «метризуемыми»: так говорят, когда важна не метрика как таковая, а задаваемая ею топология). Для метризуемых пространств большинство рассуждений, связанных с пределами, сводится к привычным пределам последовательностей. Приведем только один пример такого сведения.

Предложение 2.8. *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$ — подмножество. Тогда его замыкание $\bar{M} \subset X$ состоит из всех пределов последовательностей, все элементы которых лежат в M .*

Доказательство. Пусть N — множество пределов последовательностей из элементов множества M . Сначала покажем, что $\bar{M} \subset N$, а затем, что $N \subset \bar{M}$.

$\bar{M} \subset N$: пусть $x \in \bar{M}$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ шар $B_{1/n}(x)$ имеет непустое пересечение с M ; выберем в этом пересечении точку (произвольным образом) и обозначим ее x_n . Поскольку $\rho(x_n, x) < 1/n$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, так что $x \in N$.

$N \subset \bar{M}$: пусть $x \in N$, тогда $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, где $x_n \in M$ для всех n . По определению предела, для всякого открытого множества $U \supset x$ найдется (и не одно!) число n , для которого $x_n \in U$; стало быть, $U \cap M \neq \emptyset$, откуда $x \in \bar{M}$. $\square$

3. Действительные числа

На этой лекции мы построим действительные числа, исходя из чисел рациональных, множество которых обозначается $\mathbb{Q}$.

Мы будем определять действительное число как последовательность рациональных чисел, «его приближающую». При этом, во-первых, надо,

чтобы последовательность в принципе могла к чему-нибудь стремиться (приближения к какому числу задает последовательность $a_n = (-1)^n$?), и во вторых, надо отождествлять последовательности, «стремящиеся к одному и тому же».

Определение 3.1. Последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что $|a_m - a_n| < \varepsilon$, как только $m, n \geq N$.

(В этом определении ε — рациональное число: ведь мы делаем вид, что никаких других не знаем!)

Определение 3.2. Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Будем обозначать эквивалентность фундаментальных последовательностей символом $\sim$.

Поскольку предел суммы равен сумме пределов, отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей действительно заслуживает этого названия¹.

Определение 3.3. *Действительным числом* называется класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{Q}$, то последовательность $\{a_n\}$ эквивалентна последовательности, все члены которой совпадают с a . Если отождествить класс всякой такой последовательности с числом a , то получим вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$; далее мы всегда будем подразумевать, что $\mathbb{Q}$ вложено в $\mathbb{R}$ именно таким образом.

Итак, *множество* действительных чисел мы построили. Теперь надо определить сложение, умножение и неравенства и убедиться, что они обладают привычными свойствами. Для всего этого нужна небольшая техническая подготовка.

Предложение 3.4. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу $a \in \mathbb{Q}$, то она фундаментальна.*

Доказательство. Из условия следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n \geq N$. Следовательно, если $m, n \geq N$, то $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. $\square$

¹То есть оно рефлексивно ($a \sim a$ для всех a), симметрично (если $a \sim b$, то $b \sim a$) и транзитивно (если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$).

Предложение 3.5. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

(Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число M , что $|a_n| \leq M$ для всех n .)

Доказательство. Если $\{a_n\}$ фундаментальна, то существует такое N , что $|a_m - a_n| < 1$, как только $m, n \geq N$. Следовательно, все члены последовательности с номерами, большими N , заключены между $a_N - 1$ и $a_N + 1$; поскольку кроме них у последовательности имеется только конечное число членов, последовательность ограничена. $\square$

Теперь определим сложение, вычитание и умножение действительных чисел. Заметим, что если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — фундаментальные последовательности, то последовательности $\{a_n \pm b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ также фундаментальны. В самом деле, для суммы и разности это немедленно вытекает из неравенства $|(a_m \pm b_m) - (a_n \pm b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$, а для произведения выводится из предложения 3.5 следующим образом. Поскольку $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ фундаментальны, существует такое M , что $|a_n| \leq M$ и $|b_n| \leq M$ для всех n ; стало быть, если N настолько велико, что $|a_m - a_n| < \varepsilon/2M$ и $|b_m - b_n| < \varepsilon/2M$ при $m, n \geq N$, то

$$\begin{aligned} |a_m b_m - a_n b_n| &= |a_m(b_m - b_n) + (a_m - a_n)b_n| \leq \\ &\leq |a_m| \cdot |b_m - b_n| + |a_m - a_n| \cdot |b_n| < M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Имея это в виду, определим сумму (соотв. разность, произведение) действительных чисел, заданных фундаментальными последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, как действительно число, заданное фундаментальной последовательностью $\{a_n + b_n\}$ (соотв. $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$).

Чтобы это определение было корректным, надо, чтобы при замене последовательности $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ на эквивалентную результирующая последовательность также заменялась на эквивалентную. Для сложения и вычитания это совсем легко: если $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, т. е. $a_n - a'_n \rightarrow 0$, то и последовательность $(a_n + b_n) - (a'_n + b_n) = a_n - a'_n$ также стремится к нулю. Для умножения это опять-таки выводится из предложения 3.5: если $a_n - a'_n \rightarrow 0$ и $|b_n| \leq M$ при всех n , то $|a_n b_n - a'_n b_n| \leq M \cdot |a_n - a'_n|$, и правая часть этого неравенства стремится к нулю.

Итак, мы определили на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел сложение и умножение; очевидно, что эти операции обладают обычными свойствами (коммутативность, ассоциативность, наличие нуля и противоположных элементов, дистрибутивность).

Чтобы доказать возможность деления на ненулевое число, а также определить неравенства, нам понадобится еще один технический факт.

Предложение 3.6. Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность рациональных чисел, не стремящаяся к нулю. Тогда либо существуют такие $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \geq c$ при всех $n > N$, либо существуют такие $c < 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \leq c$ при всех $n > N$.

Доказательство. Поскольку $\{a_n\}$ не стремится к нулю, существует такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечно большого количества номеров $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| \geq \varepsilon$. Поскольку $\{a_n\}$ фундаментальна, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $m, n \geq N$ имеем $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Так как, в частности, существует $n \geq N$, для которого $|a_n| \geq \varepsilon$, отсюда следует, что при $m \geq N$ имеем либо $a_m > \varepsilon/2$, либо $a_m < -\varepsilon/2$. Так как при $m, m' \geq N$ имеем $|a_m - a_{m'}| < \varepsilon/2$, отсюда вытекает, что только одно из этих неравенств выполняется при всех $m \geq N$. В первом из этих случаев полагаем $c = \varepsilon/2$, во втором полагаем $c = -\varepsilon/2$. $\square$

Пусть теперь $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, не стремящаяся к нулю. Тогда из предложения 3.6 вытекает, что существует такое $c > 0$, что $|a_n| > c$ при всех $n \geq N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Положим $b_n = 1/a_n$ при $n \geq N$ и $b_n = 0$ при $n < N$. Из неравенства $|b_m - b_n| = \frac{|a_m - a_n|}{a_m a_n} \leq \frac{|a_m - a_n|}{c^2}$, выполненного при всех $m, n \geq N$, следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, число, представляемое последовательностью $\{b_n\}$, обратно к числу, представляемому фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Этим доказана возможность деления на ненулевые числа. По-ученому говоря, мы установили, что действительные числа образуют *поле*.

Чтобы определить неравенства, достаточно определить, что такое положительное число. Заметим, что если $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, не стремящаяся к нулю, то ввиду предложения 3.6 либо существует такое $c > 0$, что $a_n \geq c$ для всех n , кроме конечного числа, либо существует такое $c < 0$, что $a_n \leq c$ для всех n , кроме конечного числа. В первом случае будем говорить, что число, соответствующее последовательности $\{a_n\}$, *положительно*, а во втором — что оно *отрицательно*. Надо еще проверить (опять-таки с помощью предложения 3.6), что положительность и отрицательность не зависит от выбора фундаментальной последовательности, представляющей данное число — сделайте это самостоятельно.

Легко видеть, что выполнены следующие утверждения:

- (1) всякое $\alpha \in \mathbb{R}$ либо положительно, либо равно нулю, либо отрицательно, причем эти три возможности попарно несовместимы;
- (2) $\alpha \in \mathbb{R}$ положительно тогда и только тогда, когда $-\alpha$ отрицательно;

(3) сумма и произведение положительных чисел положительны.

Если теперь положить по определению, что $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta$ положительно, то окажется, что для действительных чисел выполнены все обычные свойства неравенств (поскольку они формально выводятся из перечисленных выше свойств множества положительных чисел). По-ученому говоря, мы ввели на $\mathbb{R}$ структуру *упорядоченного поля*.

Далее, можно определить абсолютную величину действительного числа (по формуле $|a| = \max(a, -a)$) и проверить все обычные неравенства с модулями. Эта чисто формальная деятельность предоставляется читателю.

Коль скоро определены неравенства, обретают смысл определенная в первой лекции топология на $\mathbb{R}$ и понятие предела последовательности действительных чисел; более того, легко видеть, что верны все стандартные факты из «арифметики пределов» (предел суммы равен сумме пределов и пр.), поскольку в их доказательстве ничего, кроме свойств неравенств, не используется.

Кроме того, раз мы строго определили сложение и неравенства между действительными числами, стало законным и определение метрического пространства.

Наша следующая тема — так называемые теоремы о полноте действительных чисел.

Покажем сначала, что всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.

Предложение 3.7. *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такая последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ рациональных чисел, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.*

Доказательство. Пусть действительное число α представляется фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (предел берется в $\mathbb{R}$!).

Лемма 3.8 («аксиома Архимеда»). *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > \alpha$; для всякого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдется такое $r \in \mathbb{Q}$, что $0 < r < \varepsilon$.*

Доказательство леммы. Второе утверждение леммы немедленно следует из первого, если положить $\alpha = 1/\varepsilon$ и $r = 1/n$. Для доказательства первого утверждения заметим, что фундаментальная последовательность $\{a_m\}$, представляющая число α , ограничена ввиду предложения 3.5; в частности, $a_m < M$ для некоторого $M \in \mathbb{Q}$ и всех m . Пусть n — такое натуральное число, что $n > M + 1$. Тогда $n - a_m > 1$ для всех

m , так что число $n - \alpha$, представляемое фундаментальной последовательностью $\{n - a_m\}$, положительно. $\square$

Возвращаясь к доказательству предложения, заметим, что ввиду второй части леммы достаточно убедиться, что для всякого *рационального* $r > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - \alpha| \leq r$ при всех $n \geq N$. Поскольку, однако, последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям определения 3.1, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_m - a_n| \leq r$ при $m, n \geq N$. В частности, при всех $m, n \geq N$ имеем $|a_m - a_N| \leq r$, или, что равносильно, $a_n - r \leq a_m \leq a_n + r$. Ввиду нашего определения неравенств отсюда вытекает, что $a_n - r \leq \alpha \leq a_n + r$, т. е. $|a_n - \alpha| \leq r$. Так как это верно при всех $n \geq N$, предложение доказано. $\square$

Будем называть последовательность действительных чисел *фундаментальной*, если она удовлетворяет условиям определения 3.1 (при этом под ε понимается произвольное действительное число).

Теорема 3.9 (критерий Коши). *Последовательность действительных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Часть «только тогда» доказывается дословно так же, как предложение 3.4. Докажем часть «тогда».

Пусть $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность действительных чисел. Ввиду предложения 3.7, для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $r_n \in \mathbb{Q}$, что $|\alpha_n - r_n| < 1/n$. Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ фундаментальна: имеем

$$|r_m - r_n| \leq |\alpha_m - \alpha_n| + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

и ясно, что если при $m, n \geq N$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon/3$, а также $1/m < \varepsilon/3$ и $1/n < \varepsilon/3$, то для таких m и n будет выполнено неравенство $|r_m - r_n| < \varepsilon$. Пусть α — действительное число, соответствующее фундаментальной последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$; из предложения 3.7 (точнее говоря, из его доказательства) явствует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$. Поскольку последовательность $\{r_n\}$ и $\{\alpha_n - r_n\}$ обе имеют предел (вторая из них стремится к нулю, поскольку ее n -й член по модулю меньше, чем $1/n$), из теоремы о пределе суммы вытекает, что предел есть и у последовательности $\{\alpha_n\}$. $\square$

Доказательство критерия Коши — последнее место в нашем курсе, где мы напрямую использовали определение действительных чисел как

классов фундаментальных последовательностей. Далее мы будем пользоваться более удобными средствами. Наряду с критерием Коши важную роль играет «теорема о верхней грани».

Определение 3.10. *Точной верхней гранью* подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшее из чисел $c \in \mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: $x \leq c$ при всех $x \in X$ (такие числа мы будем называть «верхними границами» множества X). Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup X$.

Очевидно, что точная верхняя грань (иногда мы будем для краткости говорить просто «верхняя грань») единственна, если она существует. Ясно, что она не существует, если множество M не является «ограниченным сверху» (то есть содержит сколь угодно большие числа). Во всех остальных случаях, однако, точная верхняя грань имеется:

Теорема 3.11 (о верхней грани). *Всякое ограниченное сверху непустое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань.*

Доказательство. Обозначим через x_1 наибольшее целое число, не являющееся верхней границей множества X (такое существует ввиду «аксиомы Архимеда» 3.8). Построим теперь по индукции последовательность чисел $\{x_n\}$, ни одно из которых не является верхней границей множества X , следующим образом. В качестве x_1 берем число, построенное выше, а x_{n+1} строим по x_n так: если $x_n + 1/2^n$ также не является верхней границей множества X , то полагаем $x_{n+1} = x_n + 1/2^n$, в противном же случае полагаем $x_{n+1} = x_n$. Из нашего построения следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ число $x_n + 1/2^{n-1}$ является верхней границей для X .

Заметим, что $0 \leq x_{n+1} - x_n \leq 1/2^n$, так что при $m > n$ имеем

$$0 \leq x_m - x_n \leq \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-2}} \leq \frac{1}{2^{n-1}};$$

стало быть, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и тем самым по критерию Коши имеет предел (обозначим его x). Покажем, что x — верхняя грань множества X .

(1) *x является верхней границей для X .* Пусть, напротив, $y \in X$ и $y > x$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x + 1/2^{n-1} < y$; имеем $x_n + 1/2^{n-1} \leq x + 1/2^{n-1} < y$, в противоречие с тем, что $x_n + 1/2^{n-1}$ — верхняя граница для X .

(2) *x является наименьшей верхней границей для X .* Пусть, напротив, $y < x$ и y является верхней границей для x . Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \geq y$; поскольку y является верхней границей для X , а x_n — нет, получаем противоречие. $\square$

У множества X , не являющегося ограниченным сверху, точной верхней грани в смысле определения 3.10 по понятным причинам не существует; тем не менее иногда в этом случае пишут $\sup X = +\infty$.

Точной нижней гранью, или просто нижней гранью подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшее из таких чисел c , что $c \leq x$ при всех $x \in X$. Из теоремы 3.11 ясно, что всякое ограниченное снизу множество имеет (единственную) точную нижнюю грань. Точная нижняя грань множества X обозначается $\inf X$. Иногда полагают, что точная нижняя грань множества, не ограниченного снизу, равна $-\infty$.

Отметим еще две теоремы о полноте, которые без труда выводятся из теоремы о верхней грани.

(1) *Всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

(2) *Принцип вложенных отрезков: если*

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

— бесконечная последовательность вложенных друг в друга отрезков на $\mathbb{R}$, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

(Указание. Предел последовательности — верхняя грань множества ее членов; всем отрезкам принадлежит, например, верхняя грань множества их левых концов.)

4. Компактность

Теперь, когда у нас есть строгое определение действительных чисел, вернемся к абстрактной топологии.

Определение 4.1. Топологическое пространство X называется *компактным*, если оно обладает следующим свойством: во всяком семействе открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$, обладающем тем свойством, что $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, существует такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$, что $X = \bigcup_{\alpha_1}^\alpha \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ (кратко эту мысль выражают так: из всякого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие).

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется компактным, если оно компактно в топологии, индуцированной с X .

Пример 4.2. Всякое компактное подмножество $M \subset \mathbb{R}$ обязано быть ограниченным. В самом деле, для всякого $i \in \mathbb{Z}$ рассмотрим открытое в M множество $U_i = (i - 1; i + 1) \cap M$. Ясно, что $M = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ и что неограниченное множество M не может быть объединением конечного подсемейства этого семейства.

Пример 4.3. Интервал $(0; 1) \subset \mathbb{R}$ ограничен, но компактным все же не является: имеем $(0; 1) = \bigcup_{n \geq 2} (1/n; 1 - 1/n)$, и конечного подпокрытия из этого покрытия не выберешь.

Приведем теперь позитивный пример.

Предложение 4.4. *Всякий отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ компактен.*

Это предложение называют иногда леммой Гейне—Бореля.

Доказательство. Пусть $[a; b] = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ — открытое покрытие. Положим

$X = \{x \in (a; b) : \text{отрезок } [a; x] \text{ покрывается конечным числом множеств } U_{\alpha}\}.$

Заметим, что $X \neq \emptyset$: в самом деле, пусть $a \in U_{\alpha_0}$, тогда $[a; a + \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и, скажем, отрезок $[a; a + \varepsilon/2]$ покрывается всего лишь одним множеством из нашего семейства.

Далее, пусть $\xi = \sup X$; покажем, что $\xi \in X$. В самом деле, пусть $\xi \in U_{\beta}$. Так как ξ — верхняя грань множества X , существует точка $c \in U_{\beta} \cap X$; по определению множества X имеем $[a; c] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; тогда $[a; \xi] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_{\beta}$, так что $\xi \in X$.

Покажем, наконец, что $\xi = b$. В самом деле, пусть $\xi \in U_{\beta}$; если $\xi < b$, то имеем $(\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon) \subset U_{\beta}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда, добавляя, если надо, множество U_{β} к конечному семейству множеств U_{α} , покрывающих $[a; \xi]$, получаем, что, скажем, $\xi + \varepsilon/2 \in X$, в противоречие с тем, что $\xi = \sup X$.

Коль скоро $\xi = b$, отрезок $[a; b]$ покрывается конечным числом множеств U_{α} , что и требовалось доказать. $\square$

Чтобы понять интуитивный смысл компактности, с ней надо немного поработать. Для начала — несколько простых свойств.

Предложение 4.5. *Пусть X — компактное топологическое пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда Y компактно.*

Доказательство. Согласно определению индуцированной топологии, задать открытое покрытие множества Y — все равно, что задать такое семейство открытых подмножеств $U_{\alpha} \subset X$, что $Y \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$. Добавив к этому семейству открытое множество $X \setminus Y$, получим открытое покрытие X . Ввиду компактности X некоторое конечное подсемейство этого покрытия также покрывает X . Выбросим из этого под-

семейства множество $X \setminus Y$, если оно там есть; оставшиеся множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ обязаны покрывать Y , что и требовалось. $\square$

Чуть менее тривиально доказывается следующий факт.

Предложение 4.6. *Пусть X — хаусдорфово пространство и $K \subset X$ — его компактное подмножество. Тогда K замкнуто в X .*

Доказательство. Ввиду предложения 1.15 достаточно показать, что для всякой точки $z \notin K$ существует такое открытое $V \ni z$, что $V \cap K = \emptyset$. Однако же ввиду отделимости X для каждой точки $x \in K$ найдутся такие открытые подмножества $U_x \ni x$ и $V_x \ni z$, что $U_x \cap V_x = \emptyset$. Имеем, очевидно, $K = \bigcup_{x \in K} U_x$; ввиду компактности K имеем $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ для некоторого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\}$; тогда открытое множество $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ содержит z и не пересекается с K , что и требовалось. $\square$

Из доказанных предложений вытекает следующее конкретное описание компактных подмножеств $\mathbb{R}$.

Следствие 4.7. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. «Тогда» следует из предложений 4.4 и 4.5, а «только тогда» — из предложения 4.6 и примера 4.2. $\square$

Следующее свойство компактных пространств выглядит так.

Предложение 4.8. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X компактно. Тогда подмножество $f(X) \subset Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $f(X) \subset \bigcup U_\alpha$, где все U_α открыты в Y . Тогда $X = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$, где все $f^{-1}(U_\alpha)$ открыты в X ввиду непрерывности f . Так как X компактно, имеем $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Отсюда $f(X) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$, что и требовалось. $\square$

Сопоставляя только что доказанное предложение с предложением 4.6, получаем такое

Следствие 4.9. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X компактно, а Y хаусдорфово. Тогда f переводит замкнутые подмножества X в замкнутые подмножества Y .*

Предложение 4.8 имеет также такое конкретное следствие.

Следствие 4.10. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном пространстве X . Тогда f достигает на X наибольшего и наименьшего значения.

Доказательство. Ввиду предложений 4.8 и 4.7, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ ограничено (стало быть, у него есть точная верхняя и точная нижняя грани) и замкнуто (стало быть, его верхняя и нижняя грани принадлежат $f(X)$ и тем самым являются его наибольшим и наименьшим элементами). $\square$

Еще более конкретизируя, получаем

Следствие 4.11. Всякая непрерывная функция на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$ достигает на нем наибольшего и наименьшего значения.

Прежде чем двигаться дальше, введем еще одно общее определение. Напомним, что *прямым произведением* (или *декартовым произведением*) множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар $(x; y)$, где $x \in X$, а $y \in Y$.

Определение 4.12. Пусть X и Y — топологические пространства. *Топологией произведения* на их прямом произведении $X \times Y$ называется топология, порожденная базой открытых множеств вида $U \times V \subset X \times Y$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ — произвольные открытые подмножества.

Разумеется, надо проверить, что указанный набор подмножеств в $X \times Y$ действительно является базой открытых множеств (проверка тривиальна — проделайте ее).

Аналогично определяется топология на прямом произведении произвольного конечного числа пространств.

Проверьте самостоятельно, что топологическое пространство $\mathbb{R}^n$ является произведением n экземпляров пространства $\mathbb{R}$ со стандартной топологией.

Предложение 4.13. Пусть X и Y — компактные топологические пространства. Тогда произведение $X \times Y$ также компактно.

Доказательство. Ясно, что достаточно найти конечное подпокрытие в покрытии пространства $X \times Y$ открытыми подмножествами вида $U_\alpha \times V_\beta$, где U_α — открытое подмножество в X , а V_β — открытое подмножество в Y . Далее, для всякой точки $x \in X$ подмножество $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ естественно отождествляется с Y (паре $(x; y)$ соответствует $y \in Y$); легко видеть, что при этом отождествлении индуцированная с $X \times Y$ топология на $\{x\} \times Y$ переходит в исходную

топологию на Y . Возвращаясь к нашему покрытию $X \times Y$ множествами вида $U_\alpha \times V_\beta$, отметим, что, ввиду компактности Y и только что сделанного замечания, для всякой точки $x \in X$ существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что $\{x\} \times Y \subset U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \times V_{\beta_n}$. Обозначим через U_x пересечение множеств вида U_{α_i} , содержащих x ; тогда $U_x \times Y \subset U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \times V_{\beta_n}$. Поскольку $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, ввиду компактности X существуют такие $x_1, \dots, x_m$, что $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$. Стало быть, $X \times Y = (U_{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{x_m} \times Y)$; тем самым $X \times Y$ является объединением конечного числа подмножеств, каждое из которых покрыто конечным числом множеств нашего покрытия. Следовательно, само $X \times Y$ также покрывается конечным числом множеств нашего покрытия. $\square$

Доказанное предложение также имеет конкретные следствия. Сначала —

Определение 4.14. *Параллелепипедом* называется множество вида

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

(подразумевается, что $a_i < b_i$ для всех i).

Следствие 4.15. *Всякий параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ компактен.* $\square$

Из этого вытекает также такой аналог предложения 4.7.

Следствие 4.16. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.* $\square$

(По определению, подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если все координаты его точек ограничены — иными словами, если X содержится в некотором параллелепипеде.)

Для метрических пространств существует еще одна характеристика компактности. Начнем с такого определения.

Определение 4.17. Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность точек в топологическом пространстве X и $a \in X$. Точка a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U \ni a$ бесконечно много $n \in \mathbb{N}$, для которых $x_n \in U$. Легко видеть, что если пространство X метрическое, то это равносильно тому, что существует подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к a .

Теперь сформулируем условие, которое для метрических пространств окажется эквивалентным компактности.

Определение 4.18. Пространство называется *секвенциально компактным*, если всякая последовательность его точек имеет предельную точку.

Неформально говоря, в секвенциально компактном пространстве последовательность не может быть «всюду разреженной».

Основная теорема о компактных метрических пространствах гласит следующее.

Теорема 4.19. *Метрическое пространство $(X; \rho)$ компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Начнем с более простой части «только тогда». Пусть X компактно. Если ни одна точка $a \in X$ не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, то для всякой $a \in X$ существует такое открытое множество $U_a \ni a$, что $x_n \in U_a$ лишь для конечного числа натуральных чисел n . Ввиду компактности X имеем $X = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$ для каких-то $a_1, \dots, a_m \in X$, так что $x_n \in X$ лишь для конечного числа натуральных чисел n , что нелепо.

Для доказательства «тогда» нам понадобится одна лемма, полезная и сама по себе.

Лемма 4.20 (о левебеговом числе). *Для всякого открытого покрытия секвенциально компактного метрического пространства X существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой точки $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из множеств покрытия.*

Доказательство леммы. Предположим, что искомого «левебегова числа» не нашлось. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in X$, что $B_{1/n}(x_n)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Ввиду секвенциальной компактности из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Стало быть, существуют такие последовательность точек $y_m \in X$, сходящаяся к точке $y \in X$, и последовательность положительных чисел ε_m , сходящаяся к нулю, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ шар $B_{\varepsilon_m}(y_m)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Приведем эту ситуацию к противоречию.

В самом деле, имеем $y \in U$, где U — какое-то из множеств, входящих в покрытие. Так как U открыто, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(y) \subset U$. Если теперь при всех $m \geq N$ имеем $\rho(y_m, y) < \varepsilon/2$ и $|\varepsilon_m| < \varepsilon/2$, то из неравенства треугольника вытекает, что при $m \geq N$ имеем $B_{\varepsilon_m}(y_m) \subset B_\varepsilon(y)$. Поскольку $B_\varepsilon(y)$ содержится в U , получаем противоречие с выбором чисел ε_m . $\square$

Теперь можно завершить доказательство теоремы. Итак, пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие секвенциально компактного метрического

пространства X ; нам нужно выбрать из него конечное подпокрытие. Ввиду леммы существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из U_α . Стало быть, достаточно выбрать конечное подпокрытие в покрытии $\bigcup_{x \in X} B_\varepsilon(x) = X$; этим мы сейчас и займемся.

Выберем произвольно точку $x_1 \in X$; если $B_\varepsilon(x_1) = X$, то требуемое подпокрытие (состоящее всего из одного множества) уже найдено; если нет, то возьмем произвольную $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1)$; если $B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \neq X$, то возьмем произвольную $x_3 \in X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$, и т. д. Если этот процесс на каком-то шаге оборвется, мы получим искомое конечное покрытие пространства X множествами вида $B_\varepsilon(x)$; в противном случае мы получаем последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, обладающую тем свойством, что $\rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ при $m \neq n$. Ясно, что ни такая последовательность, ни любая ее подпоследовательность предела иметь не может: если $\rho(y_n, y_{n+k}) \geq \varepsilon$ при $k > 0$ и $\lim y_n = y$, то, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $\rho(y_n, y) \geq \varepsilon$ при всех n , что нелепо.

Полученное противоречие с секвенциальной компактностью завершает доказательство. $\square$

5. Связность; пополнение

Эта лекция посвящена двум слабо связанным между собой темам из «абстрактной топологии» (по возможности, с конкретными приложениями).

Связность

Предложение-определение 5.1. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

- (1) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств;
- (2) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств;
- (3) существует непустое и отличное от всего X подмножество $M \subset X$, являющееся одновременно открытым и замкнутым.

Эквивалентность трех условий проверяется тривиально.

Топологическое пространство называется *связным*, если оно не является несвязным.

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется *связным*, если оно связно относительно индуцированной топологии.

Приведем сначала примеры несвязных пространств.

Пример 5.2. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — связное подмножество. Тогда оно обязано быть «выпуклым»: если $a, b \in M$ и $a < b$, то $[a; b] \subset M$.

В самом деле, если $a < z < b$ и $z \notin M$, то имеем

$$M = (M \cap (-\infty; z)) \cup (M \cap (z; \infty)),$$

что и дает разбиение M на два непересекающихся непустых открытых подмножества.

Привести нетривиальный пример связного пространства немногим труднее:

Предложение 5.3. *Всякий отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ связан.*

Доказательство. Предположим противное; тогда существует отличное от $[a; b]$ непустое открыто-замкнутое (то есть одновременно открытое и замкнутое) подмножество $M \subset [a; b]$; не ограничивая общности, можно считать, что $M \ni a$ (в противном случае заменим M на его дополнение). Покажем, что $M = [a; b]$ — это и даст желаемое противоречие.

В самом деле, положим $X = \{x \in (a; b]: [a; x] \subset M\}$. Поскольку множество M открыто и содержит a , оно содержит также интервал вида $[a; a + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, так что $X \neq \emptyset$. Пусть $\xi = \sup X$; покажем, что $\xi \in X$. В самом деле, ясно, что (независимо от специфики множества X) существует возрастающая последовательность чисел $x_n \in X$, для которой $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Поскольку $[a; x_n] \subset M$ для всех n , имеем $[a; \xi) \subset \bigcup_n [a; x_n] \subset M$. Кроме того, $\xi \in M$, так как M замкнуто, а ξ является пределом последовательности элементов множества M . Стало быть, $[a; \xi] \subset M$ и $\xi \in X$. Покажем теперь, что $\xi = b$. В самом деле, если $\xi < b$, то, ввиду открытости множества M , существует такое $\varepsilon > 0$, что $[\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon] \subset M$. Следовательно, $[a; \xi + \varepsilon] = [a; \xi] \cup [\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon] \subset M$ и $\xi + \varepsilon \in X$, в противоречие с тем, что $\xi = \sup X$. Значит, $\xi = b$ и $M = [a; b]$ — противоречие. $\square$

Докажем теперь несколько простых, но важных общих свойств связных пространств.

Предложение 5.4. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X связно. Тогда $f(X) \subset Y$ также связно.*

Доказательство. Пусть, напротив, $f(X)$ несвязно. Тогда существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset Y$, что $f(X) \subset U_1 \cup U_2$,

$U_1 \cap U_2 \cap f(X) = \emptyset$, и оба пересечения $f(X) \cap U_1$ и $f(X) \cap U_2$ непусты. Отсюда вытекает, что X является объединением непустых непересекающихся подмножеств $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$ и тем самым несвязно — противоречие. $\square$

Предложение 5.5. Пусть топологическое пространство X обладает таким свойством: для любых двух точек $x, y \in X$ существует связное подмножество $I \subset X$, содержащее x и y . Тогда X связно.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, где открытые множества U_1 и U_2 непусты и не пересекаются. Выберем точки $x \in U_1$ и $y \in U_2$, и пусть $I \subset X$ — связное подмножество, существование которого утверждается в условии предложения. Тогда $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, причем оба этих множества открыты в I в индуцированной топологии и непусты (одно содержит x , другое содержит y). Значит, I несвязно — противоречие. $\square$

Сопоставляя предложения 5.4 и 5.5, получаем, что любой интервал в $\mathbb{R}$ (такой, как $(a; b]$, $(-\infty; a)$, и т. д., в том числе само пространство $\mathbb{R}$) является связным.

Обобщая предыдущее замечание, приходим к такому определению.

Определение 5.6. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для всяких двух точек $x, y \in X$ существуют такие отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ и непрерывное отображение $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(a) = x$ и $f(b) = y$.

Предложения 5.4 и 5.5 показывают, что всякое линейно связное пространство является связным. В частности, связны пространство $\mathbb{R}^n$, любой параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, и вообще любое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Существуют примеры связных пространств, не являющихся линейно связными (уже среди замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^2$).

Связные подмножества в $\mathbb{R}$ можно полностью описать следующим образом.

Предложение 5.7. Подмножество $M \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является отрезком $[a; b]$, полуоткрытым интервалом $(a; b]$ или $[a; b)$ или открытым интервалом $(a; b)$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (При символах ∞ и $-\infty$ квадратные скобки не ставятся; случай $a = b$ не исключен.)

Доказательство. Мы уже отмечали, что всякое множество указанного вида является связным; покажем, что никаких других связных подмножеств в $\mathbb{R}$ нет.

Разберем сначала случай, когда M ограничено. Положим $a = \inf M$, $b = \sup M$. Заметим, что $(a; b) \subset M$. В самом деле, если $a < c < b$, то (по определению верхней и нижней граней) существуют такие числа u и v , что $a < u < c < v < b$ и при этом $u, v \in M$; пример 5.2 показывает, что $[u; v] \subset M$ и, в частности, $c \in M$.

Итак, $(a; b) \subset M$, никакие числа, меньшие a или большие b , во множество M не входят, и остается разобрать четыре возможных случая в зависимости от того, входят ли в M сами числа a и b — при этом получаем варианты $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ и $[a; b]$.

Случай, когда M не ограниченно сверху и/или снизу, разберите самостоятельно. $\square$

Нелишне заметить, что ни о какой классификации связных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ речи быть не может.

Теперь приведем приложение доказанных общих фактов к конкретному анализу.

Предложение 5.8. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ с действительными значениями. Тогда множество ее значений $f([a; b])$ также является отрезком в $\mathbb{R}$. В частности, f принимает все значения, промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Предложения 4.8 и 4.7 показывают, что множество $f([a; b])$ замкнуто и ограничено, а предложение 5.4 показывает, что это множество является интервалом; однако всякий замкнутый в $\mathbb{R}$ и ограниченный интервал является отрезком. $\square$

Пополнение

Следующее определение — непосредственное обобщение определения 3.1.

Определение 5.9. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Последовательность его точек $x_n \in X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $m, n > N$ выполнено неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Точно так же, как в лекции 3, доказывается, что если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

Определение 5.10. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Вообще говоря, метрическое пространство быть полным вовсе не обязано. Например, интервал $(0; 1)$ (с метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}$)

неполон: последовательность $x_n = 1/n$ фундаментальна (так как она сходится в $\mathbb{R} \supset (0; 1)$), но предела в $(0; 1)$ не имеет. Из критерия Коши вытекает, что $\mathbb{R}$, тем не менее, полно; легко видеть, что полно и $\mathbb{R}^n$ (в любой из L^p -метрик).

Предложение 5.11. Пусть X — полное метрическое пространство. Подмножество $Y \subset X$ полно (в индуцированной метрике) в том и только том случае, когда оно замкнуто.

Доказательство. Если Y замкнуто и $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность в Y , то она сходится к некоторой точке $y \in X$ ввиду полноты X , и $y \in Y$ ввиду замкнутости Y .

Обратно, если Y полно и последовательность его точек $\{y_n\}$ сходится к точке $y \in X$, то последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, а следовательно, ввиду полноты Y , сходится к точке, лежащей в Y . Ввиду единственности предела имеем $y \in Y$. $\square$

Определение 5.12. Пусть X — метрическое пространство. Его *пополнением* называется пара $(\bar{X}, i)$, в которой $\bar{X}$ — полное метрическое пространство, $i: X \rightarrow \bar{X}$ — вложение, сохраняющее расстояния, и замыкание подмножества $i(X) \subset \bar{X}$ совпадает со всем $\bar{X}$.

Часто пополнением называют не пару $(\bar{X}, i)$, а пространство $\bar{X}$, поскольку отображение i обычно ясно из контекста.

Основное свойство пополнений состоит в том, что пополнение всегда существует и единственно. Точнее говоря:

Теорема 5.13. У всякого метрического пространства (X, ρ) существует пополнение; если $(\bar{X}_1, i_1)$ и $(\bar{X}_2, i_2)$ — два пополнения пространства (X, ρ) , то существует и единственно такое взаимно однозначное сохраняющее расстояния отображение $\varphi: \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}_2$, что $\varphi \circ i_1 = i_2$.

Примером пополнения может послужить любая пара, состоящая из полного метрического пространства $\bar{X}$ и вложения в него его «плотного» подмножества X (подмножество в топологическом пространстве называется плотным, если его замыкание совпадает со всем пространством). Например, $\mathbb{R}$ является пополнением $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы 5.13 очень похоже на то, что мы делали при построении действительных чисел. Именно, мы определим $\bar{X}$ как множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей, где фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются эквивалентными, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ (то, что это действительно отношение эквивалентности, проверяется так же, как в лекции 3).

Лемма 5.14. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности в метрическом пространстве, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$.

Доказательство. В силу критерия Коши достаточно установить, что последовательность $\rho(x_n, y_n)$ фундаментальна. Поскольку для любых четырех точек a, b, c и d в метрическом пространстве имеем $\rho(a, d) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c) + \rho(c, d)$ («сторона четырехугольника не превосходит суммы трех других его сторон»), выполнено неравенство

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n);$$

в правой части оба слагаемых стремятся к нулю при $m, n \rightarrow \infty$, что и доказывает фундаментальность. $\square$

Имея в виду лемму 5.14, определим расстояние между двумя элементами $\overline{X}$, представленными последовательностями $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, как $\lim \rho(x_n, y_n)$; без труда проверяется, что так определенное расстояние не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности.

Сохраняющее расстояния вложение $i: X \rightarrow \overline{X}$ определим так же, как в лекции 3, сопоставив точке $x \in X$ класс эквивалентности последовательности $\{x_n\}$, в которой $x_n = x$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Точно так же, как предложение 3.7, доказывается тот факт, что X плотно в $\overline{X}$, и точно так же, как критерий Коши 3.7, доказывается, что $\overline{X}$ полно (заключительное рассуждение: если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\alpha_n, r_n) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, что немедленно следует из неравенства треугольника).

Доказательство заключительного утверждения теоремы 5.13 проделайте самостоятельно (указание: если $\alpha \in \overline{X}_1$ и $\alpha = \lim i_1(x_n)$, то положим $\varphi(\alpha) = \lim i_2(x_n)$).

Следствие 5.15. Всякое компактное метрическое пространство является полным.

Доказательство. Пусть X — компактное метрическое пространство; вложим его в пополнение $\overline{X}$. Тогда X замкнуто в $\overline{X}$ ввиду компактности, так что $\overline{X}$, будучи замыканием X , обязано с X совпадать. Следовательно, $X = \overline{X}$ полно. $\square$

6. p -адические числа

На предыдущей лекции основную роль играли связные пространства. Сейчас мы разберем важные примеры пространств, свойства ко-

торых в некотором отношении противоположны свойствам $\mathbb{R}$ и прочих связных пространств.

Определение 6.1. Топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если оно не имеет связных подмножеств, за исключением состоящих из одной точки.

Разумеется, вполне несвязным будет всякое дискретное пространство, но существует много менее тривиальных примеров. Например, вполне несвязным, но недискретным, будет множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}$): в самом деле, оно не содержит ни одного интервала (см. предложение 5.7).

Сейчас мы приведем пример играющего важную роль во многих вопросах недискретного вполне несвязного компактного хаусдорфова пространства.

Зафиксируем раз и навсегда простое число p .

При записи натуральных чисел в p -ичной системе счисления каждое число представляется в виде конечной последовательности p -ичных цифр (целых чисел от нуля до $p - 1$). Давайте разрешим этим последовательностям быть бесконечными.

Определение 6.2. *Целым p -адическим числом* называется бесконечная последовательность $\{a_0, a_1, \dots\}$, в которой все a_i — p -ичные цифры. Множество целых p -адических чисел обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Будем представлять себе последовательности цифр, о которых идет речь в этом определении, записанными в виде «бесконечной влево» последовательности: a_0 , слева от него — a_1 , еще левее — a_2 , и т. д. Тогда каждое натуральное число можно тоже рассматривать как целое p -адическое, если записать его в p -ичной системе счисления, а затем дополнить слева бесконечным «хвостом» из нулей. Тем самым определяется вложение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}_p$. Например, число 39 как элемент $\mathbb{Z}_5$ запишется так: $\dots 000124$.

Над целыми p -адическими числами можно проделывать те же алгебраические операции, что и над целыми числами.

Определение 6.3. *Суммой* (соотв. разностью, произведением) целых p -адических чисел $(a_0, a_1, \dots)$ и $(b_0, b_1, \dots)$ называется целое p -адическое число, получаемое из них по правилам сложения (соотв. вычитания, умножения) «в столбик» в p -ичной системе счисления, если записать два числа одно под другим (b_0 под a_0 , b_1 под a_1 , и т. д.).

Отметим, что вычитание всегда выполнимо, поскольку ввиду «бесконечности влево» наших p -ичных записей всегда можно «занять еди-

ницу» в следующем разряде; умножение всегда выполнимо, так как для нахождения каждой цифры необходимо только конечное число сложений.

Покажем, что сложение, вычитание и умножение целых p -адических чисел обладает теми же свойствами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность...), что и у обычных целых чисел. В самом деле, если m — натуральное число и $a \in \mathbb{Z}_p$, то обозначим через $(a)_m \in \mathbb{Z}$ целое число, записываемое в p -ичной системе в виде $\overline{a_{m-1} \dots a_1 a_0}$ (т. е. образованное m младшими разрядами). Тогда из определения действий над p -адическими числами сразу следует, что m младших разрядов у $(a \pm b)_m$ и $(ab)_m$ такие же, как m младших разрядов у $(a)_m \pm (b)_m$ и $(a)_m(b)_m$ соответственно. Поэтому, например, $(a + b)c = ac + bc$, так как для всякого m у левой и правой частей совпадают m младших разрядов (поскольку умножение обычных целых чисел дистрибутивно). Поскольку это же рассуждение показывает, что вычитание p -адических чисел обратное сложению, получаем, что целые p -адические числа образуют кольцо.

Поскольку натуральные числа вкладываются в $\mathbb{Z}_p$, а целые p -адические числа можно вычитать, целые числа (т. е. разности натуральных) также вкладываются в $\mathbb{Z}_p$ как подкольцо; например, число -1 как элемент $\mathbb{Z}_5$ записывается в виде $\dots 4444$.

Отметим еще, что умножение на p сводится к приписыванию нуля справа, так что целое p -адическое число делится на p тогда и только тогда, когда его «последняя» (т. е. крайняя правая) цифра есть нуль.

Теперь введем на $\mathbb{Z}_p$ структуру метрического пространства.

Определение 6.4. Если $a \in \mathbb{Z}_p$ отлично от нуля, то его p -адической нормой называется число $|a|_p = p^{-n}$, где n — наибольшее натуральное n , для которого a делится на p^n . Если $a = 0$, полагают $|a|_p = 0$.

Определение 6.5. p -адическим расстоянием между числами $a, b \in \mathbb{Z}_p$ называется число $|a - b|_p$.

Множество $\mathbb{Z}_p$, снабженное p -адическим расстоянием, является метрическим пространством. В самом деле, условия (1) и (2) из определения 1.6 выполняются с очевидностью; поскольку $|x - z|_p = |(x - y) + (y - z)|_p$, для проверки неравенства треугольника достаточно убедиться в выполнимости неравенства $|a + b|_p \leq |a|_p + |b|_p$. Верно даже более сильное утверждение:

Предложение 6.6. Для любых $a, b \in \mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство

$$|a + b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p). \quad (6.1)$$

Доказательство. Если число a оканчивается на s нулей, а число b — на t нулей, то число $a + b$ оканчивается не менее чем на $\min(s, t)$ нулей, так что $|a + b|_p \leq p^{-\min(s, t)}$. $\square$

Неравенство (6.1) называется *ультраметрическим неравенством*.

Неформально говоря, в p -адической метрике число тем «меньше» (ближе к нулю), чем на большую степень p оно делится. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0$.

Заметим, что, поскольку расстояния между точками в $\mathbb{Z}_p$ могут принимать только значения p^{-n} , где n — целое неотрицательное число, все открытые шары в этом метрическом пространстве суть шары радиуса p^{-n} . Далее, открытый шар с центром a и радиусом p^{-n} есть не что иное, как множество чисел, у которых n младших разрядов такие же, как у числа a , т. е. «класс вычетов по модулю p^n »: множество чисел $b \in \mathbb{Z}_p$, для которых $b - a$ делится на p^n . В частности, всякий открытый шар имеет мощность континуум, откуда следует, что в $\mathbb{Z}_p$ нет изолированных точек.

Предложение 6.7. *Пространство $\mathbb{Z}_p$ компактно.*

Доказательство. Так как $\mathbb{Z}_p$ — метрическое пространство, достаточно показать, что из всякой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов $\mathbb{Z}_p$. Поскольку младший разряд чисел x_n может принимать не более p значений, какая-то из p -ичных цифр (обозначим ее a_0) является младшим разрядом бесконечного количества членов последовательности; обозначим через y_0 первый из членов последовательности, обладающий этим свойством, и удалим из последовательности все члены, младший разряд которых отличен от a_0 . Далее, среди оставшихся членов последовательности есть бесконечно много таких, у которых вторая справа цифра одна и та же (обозначим ее a_1); обозначим через y_1 какой-нибудь член последовательности, обладающий этим свойством и идущий позднее, чем y_0 , и удалим из последовательности все те члены, у которых вторая справа цифра отлична от a_1 . Продолжая по индукции, получим подпоследовательность $y_0, y_1, \dots$ и p -адическое число $a = \overline{\dots a_2 a_1 a_0}$. Поскольку по построению $|y_n - a|_p \leq p^{-n-1}$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. $\square$

Поскольку метрическое пространство $\mathbb{Z}_p$ компактно, оно является полным (следствие 5.15). На самом деле в $\mathbb{Z}_p$ верен более сильный критерий сходимости, чем критерий Коши.

Предложение 6.8. *Последовательность $\{x_n\}$ в $\mathbb{Z}_p$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.*

Доказательство. Часть «только тогда» очевидна: если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

Для доказательства части «тогда» заметим, что $\mathbb{Z}_p$ полно ввиду следствия 5.15, так что достаточно показать, что всякая последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условиям предложения, является фундаментальной. И действительно, из ультраметрического неравенства (6.1), которое очевидным образом распространяется на любое количество слагаемых, вытекает, что

$$\begin{aligned} |x_m - x_n|_p &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|_p \leq \\ &\leq \max(|x_m - x_{m-1}|_p, \dots, |x_{n+1} - x_n|_p), \end{aligned}$$

причем из условия вытекает, что правая часть стремится к нулю при $m, n \rightarrow \infty$. $\square$

Для действительных чисел предложение 6.8, как известно, места не имеет.

Предложение 6.9. *Замыкание подмножества $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ совпадает со всем $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{Z}_p$; обозначим через x_n целое число, чья p -ичная запись совпадает с n «последними» (или, если угодно, n первыми, считая справа) цифрами записи числа x . Тогда $x - x_n$ делится на p^n , то есть $|x - x_n|_p \leq p^{-n}$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. $\square$

Из доказанного предложения следует, что $\mathbb{Z}_p$ является пополнением $\mathbb{Z}$ относительно p -адической метрики.

Покажем, наконец, что $\mathbb{Z}_p$ вполне несвязно. Для этого, очевидно, достаточно установить, что если $a \neq b$ — два элемента $\mathbb{Z}_p$, то существуют такие непересекающиеся открытые подмножества $U, V \subset \mathbb{Z}_p$, что $U \ni a$, $V \ni b$ и $U \cup V = \mathbb{Z}_p$. И действительно, если младшие n разрядов у p -адического числа a не такие же, как у b , то в качестве U можно взять класс вычетов числа a по модулю p^n , а в качестве V — объединение классов вычетов по модулю p^n всех p -адических чисел, не входящих в U .

Легко видеть, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ нет делителей нуля (рассмотрите первую справа ненулевую цифру в двух сомножителях; это первое место, где используется простота числа p). Поэтому можно перейти от $\mathbb{Z}_p$ к его полю частных (т. е. добавить всевозможные¹ отношения m/n , где

¹На самом деле достаточно ограничиться отношениями вида m/p^k , где $k \in \mathbb{N}$: нетрудно показать (см. упражнения), что для всякого $n \in \mathbb{Z}_p$, не делящегося на p , существует такое $n_1 \in \mathbb{Z}_p$, что $pn_1 = 1$.

$m, n \in \mathbb{Z}_p$ и $n \neq 0$; отношения m/n и m'/n' считаются равными, если $mn' = nm'$; при этом получится *поле p -адических чисел*, обозначаемое $\mathbb{Q}_p$. Сложение, вычитание, умножение и деление p -адических чисел определяется по обычным правилам действий с дробями. Поле $\mathbb{Q}_p$ является пополнением $\mathbb{Q}$ относительно p -адической метрики (определение: для ненулевого $a \in \mathbb{Q}$ полагают $|a|_p = p^{-n}$, если a можно представить в виде $p^n(s/t)$, где числа s и t являются целыми и взаимно простыми с p ; расстоянием между рациональными числами a и b называют число $|a - b|_p$).

7. Канторово множество

А теперь построим топологическое пространство, на первый взгляд никакого отношения к p -адическим числам не имеющее.

Именно, разобьем отрезок $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ на три равные части и удалим среднюю из них как открытый интервал $(1/3; 2/3)$; останется объединение двух отрезков $[0; 1/3] \cup [2/3; 1]$. Каждый из оставшихся отрезков длины $1/3$ также разобьем на три равные части и удалим из каждого из них средний открытый интервал; с каждым из оставшихся отрезков длины $1/3^2$ сделаем ту же операцию, и так до бесконечности. Обозначим через $C \subset [0; 1]$ множество, оставшееся от отрезка после удаления всех этих открытых интервалов; это множество называется *канторовым множеством*.

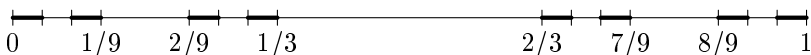


Рис. 1. Канторово множество

Каковы же свойства канторова множества C ? Из самого построения вытекает, что C состоит из тех и только тех чисел, которые можно записать в виде бесконечной троичной дроби вида $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$, в которой все a_j равны 0 или 2. (В частности, C имеет мощность континуум.) Заметим, что представление числа $x \in C$ в виде дроби такого вида единственно (поскольку при замене $0222\dots$ на $1000\dots$ в троичной записи появляется запрещенная цифра 1). Далее, C замкнуто (так как получено удалением из замкнутого множества объединения открытых интервалов) и ограничено; следовательно, оно компактно. Заметим, что C вполне несвязно: если $\alpha, \beta \in C$, и $\alpha < \beta$, то троичные разложения чисел α и β имеют вид $\alpha = 0, \overline{a_1, \dots, a_k} 0 \dots$ и $\beta = 0, \overline{a_1, \dots, a_k} 2 \dots$ для некоторого натурального k , и легко видеть, что число $0, \overline{a_1, \dots, a_k} 11$ не лежит в C и расположено между α и β .

Прежде чем двигаться дальше, расскажем об одной важной общей конструкции.

Бесконечные произведения пространств

Объясним, как определить произведение произвольного (в том числе и бесконечного) семейства топологических пространств.

Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств, занумерованное «индексами» из множества I (возможно, бесконечного). Согласно общим определениям теории множеств, их произведение *как множество* представляет собой множество всевозможных наборов $\{x_i\}_{i \in I}$, где $x_\alpha \in X_\alpha$ для всякого $\alpha \in I$. (Если, скажем, $I = \{1, 2\}$, то получается множество всевозможных пар (x_1, x_2) , где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, то есть обычное декартово произведение двух множеств.) Обозначается такое произведение $\prod_{i \in I} X_i$.

Как же задать топологию на пространстве $X = \prod_{i \in I} X_i$, чтобы она была связана с топологиями «сомножителей» X_i ?

На любом произведении множеств $\prod_{i \in I} X_i$ определены (для всякого $\alpha \in I$) отображения проекции $\text{pr}_\alpha: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_\alpha$, ставящие в соответствие набору $\{x_i\}_{i \in I}$ элемент $x_\alpha \in X_\alpha$. Естественно по крайней мере потребовать, чтобы эти отображения были непрерывны.

Впрочем, условие непрерывности проекций топологию на произведении однозначно не определяет: если, например, задать на нем дискретную топологию, то все проекции (и вообще все отображения из этого произведения куда бы то ни было) заведомо будут непрерывны, но о связи топологии произведения с топологиями сомножителей речи при этом не будет. Попробуем поэтому определить топологию на произведении наиболее экономным способом, чтобы набор открытых множеств был наименьшим возможным, при котором непрерывность всех проекций еще имеет место (как говорят, определим на произведении «наименее тонкую топологию, при которой проекции непрерывны»).

Именно, если проекция $\text{pr}_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ непрерывна, то для всякого открытого подмножества $U_\alpha \subset X_\alpha$ его прообраз $\text{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ должен быть открыт в X ; далее, поскольку пересечение конечного числа открытых множеств также открыто, открытыми должны быть и всевозможные конечные пересечения множеств такого вида. Оказывается, что этого уже и достаточно:

Предложение-определение 7.1. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. Для каждого конечного подмножества $\{\alpha_1, \dots$

$\dots, \alpha_n\} \subset I$ и каждого набора подмножеств $U_1, \dots, U_n$, где $U_j \subset X_{\alpha_j}$ — открытое подмножество, рассмотрим подмножество

$$\text{pr}_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \text{pr}_{\alpha_n}^{-1}(U_n) \subset \prod_{i \in I} X_i. \quad (7.1)$$

Тогда всевозможные множества вида (7.1) образуют базу топологии в $\prod_{i \in I} X_i$; эта топология называется топологией произведения.

Проверка того, что множества вида (7.1) действительно образуют базу топологии, тривиальна, поскольку пересечение двух множеств вида (7.1) также является множеством вида (7.1). Если множество индексов I конечно, то определение 7.1 дает, очевидно, ту же топологию, что в определении 4.12. Неформально множества вида (7.1) можно описать так: конечное число компонент в «векторе» $\{x_i\}_{i \in I}$ могут произвольно варьироваться в открытых подмножествах, а на все остальные компоненты никаких условий не накладывается.

Нетрудно показать, что в произведениях (в том числе и бесконечных) сохраняется хаусдорфовость:

Предложение 7.2. *Если все пространства X_i хаусдорфовы, то и произведение $\prod_{i \in I} X_i$ хаусдорфово.*

Доказательство. Положим $X = \prod_{i \in I} X_i$, и пусть $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in I}$ и $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i \in I}$ — два различных элемента пространства X . Тогда $x_\alpha \neq y_\alpha$ для некоторого $\alpha \in I$. Так как X_α хаусдорфово, существуют такие непересекающиеся открытые множества $U, V \subset X_\alpha$, что $U \ni x_\alpha$ и $V \ni y_\alpha$. Множества $\text{pr}_\alpha^{-1}(U)$ и $\text{pr}_\alpha^{-1}(V)$ открыты в X , не пересекаются и содержат $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно. $\square$

Предыдущее предложение было более или менее очевидно. Гораздо интереснее следующее обобщение предложения 4.13.

Предложение 7.3 (теорема Тихонова). *Если все пространства X_i компактны, то и произведение $\prod_{i \in I} X_i$ компактно.*

Доказательство теоремы Тихонова не очень сложно, но мы его опустим. В примерах бесконечных произведений компактных пространств, которые встретятся нам ниже, компактность этих произведений будет установлена непосредственно.

Примеры бесконечных произведений

Даже если топология на каждом из сомножителей дискретна, топология на их бесконечном произведении дискретной уже не будет. Зафиксируем, например, конечное множество S , содержащее более одного элемента; будем рассматривать его как топологическое пространство с дискретной топологией и обозначим через X произведение счетного числа экземпляров этого пространства, т. е. множество всевозможных бесконечных последовательностей $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, где все $a_j \in S$. Базу топологии на X образуют множества таких последовательностей, в которых конечное число членов зафиксировано, а остальные произвольны (в частности, все эти открытые множества имеют мощность континуум, так что пространство X не имеет изолированных точек). Другая возможная база топологии состоит из множеств вида

$$U_{a_1, \dots, a_n} = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i = a_i \text{ при } 1 \leq i \leq n\} \quad (7.2)$$

(для всевозможных n и всевозможных $a_1, \dots, a_n \in S$). Если обычным образом отождествить $\mathbb{Z}_p$ с множеством бесконечных последовательностей элементов множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$, то эта база топологии на произведении счетного количества экземпляров множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$ совпадает с семейством всех открытых шаров в $\mathbb{Z}_p$. Стало быть, $\mathbb{Z}_p$ *гомеоморфно произведению счетного числа дискретных p -элементных пространств*. Поскольку $\mathbb{Z}_p$ компактно, компактно и это произведение — в согласии с теоремой Тихонова.

Далее, обозначим через X произведение счетного числа двухэлементных множеств $\{0, 2\}$ (с дискретной топологией на сомножителях) и обозначим через $f: X \rightarrow C$ отображение из X в канторово множество, переводящее последовательность $a_1, a_2, \dots$ в бесконечную троичную дробь $0.\overline{a_1 a_2 \dots}$; ясно, что, во-первых, f взаимно однозначно, и, во-вторых, f и f^{-1} непрерывны. Стало быть канторово множество гомеоморфно $\mathbb{Z}_2$. На самом деле *все* $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфны канторову множеству и друг другу. Мы получим этот факт в следующем пункте как следствие более общего утверждения.

Пути на бесконечном дереве

Назовем *бесконечным деревом* бесконечный граф, устроенный следующим образом. Одна из вершин, называемая *корнем*, в графе выделена, а все остальные разбиты в несвязное объединение конечных множеств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ (для всех $n \in \mathbb{N}$); вершины, входящие в множество X_k , мы будем называть *вершинами k -го уровня*. Корень соединен ребром с каждой из вершин первого уровня, и каждая вершина k -го

уровня соединена ребром с какими-то вершинами $(k + 1)$ -го уровня. При этом при $k \geq 2$ каждая вершина k -го уровня соединена ровно с одной вершиной $(k - 1)$ -го уровня (своим *родителем*) — см. рис. 2.

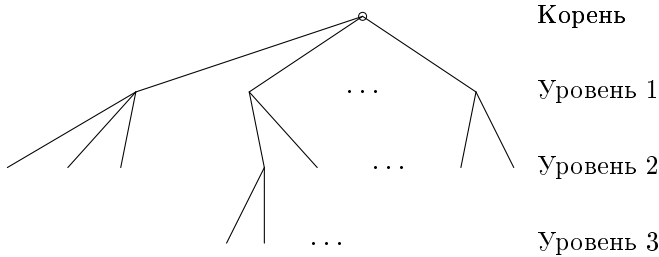


Рис. 2. Бесконечное дерево

Обозначим через X множество, состоящее из всевозможных путей в дереве, начинающихся в корне и проходящих через вершины всех уровней. Сейчас мы введем на X топологию и покажем, что (при небольших дополнительных предположениях) X с этой топологией гомеоморфно канторову множеству, а также всем $\mathbb{Z}_p$. Предварительно, однако, дадим более формальное («теоретико-множественное») описание пространства путей в дереве. Именно, обозначим через $f_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ определенное при каждом $i > 1$ отображение, ставящее в соответствие вершине ее родителя. Тогда, очевидно,

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j : f_j(x_j) = x_{j-1} \text{ для всех } j > 1 \right\}.$$

(По-ученому множество X называется проективным пределом множеств X_j относительно отображений f_j .) Топологию на X определим как индуцированную с $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$, где топология на каждом X_j дискретна. База топологии (7.2) индуцирует базу топологии на Y , в терминах путей на дереве описывающуюся следующим образом: база образуют множества путей, в которых начальный участок зафиксирован, а далее можно идти как угодно.

Заметим, что произведение $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, где все A_i — конечные множества с дискретной топологией, гомеоморфно пространству путей в бесконечном дереве, в котором из корня выходит $\text{card}(A_1)$ ребер, из каждой вершины первого уровня — $\text{card}(A_2)$ ребер, и т. д. (через $\text{card}(A)$ обозначается количество элементов в множестве A).

Предложение 7.4. *Если в бесконечном дереве из каждой вершины (включая корень) выходит не менее двух ребер, ведущих в вершины следующего уровня, то пространство путей в этом дереве гомеоморфно канторову множеству.*

(Напомним на всякий случай, что число ребер, выходящих из каждой вершины, конечно.)

Доказательство. Достаточно доказать, что пространство путей Y гомеоморфно пространству X бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

Для всякого целого $k > 1$ рассмотрим следующую последовательность k слов над алфавитом¹ $\{0, 1\}$:

$$R_k = \langle 0, 10, 110, \dots, \underbrace{1 \dots 10}_{k-2}, \underbrace{1 \dots 1}_{k-1} \rangle$$

(для ясности: $R_2 = \langle 0, 1 \rangle$, $R_3 = \langle 0, 10, 11 \rangle$). Очевидно, что ни одно из слов, входящих в множество R_k , не является начальным отрезком другого и что для каждого k и для любой бесконечной последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ из нулей и единиц существует и единственно такое $m \in \mathbb{N}$, что ее начальный отрезок $(x_1, \dots, x_m)$ входит в R_k .

Построим теперь взаимно обратные отображения $f: Y \rightarrow X$ и $g: X \rightarrow Y$. Отображение f строится так. Для каждой вершины дерева, включая корень, пронумеруем каким-либо образом ее потомков (т. е. вершины следующего уровня, соединенные с ней ребром). Каждый путь $\xi \in Y$ проходит через одну вершину нулевого уровня, одну вершину первого уровня, и т. д.; поставим ему в соответствие последовательность пар натуральных чисел $(k_1, a_1), (k_2, a_2), \dots$, где k_i — число потомков вершины $(i-1)$ -го уровня, через которую проходит путь, а a_i — номер того из потомков вершины $(i-1)$ -го уровня, через которую проходит путь; этой последовательности пар, в свою очередь, сопоставим такую последовательность из нулей и единиц: слово номер a_1 из R_{k_1} , за ним встык слово номер a_2 из R_{k_2} , и т. д. Это и будет $f(\xi) \in X$.

Обратно, пусть $\eta \in X$ — бесконечная последовательность из нулей и единиц. Поставим ей в соответствие такой путь в бесконечном дереве. Пусть из корня исходит k_1 ребер в вершины первого уровня; найдем в последовательности η начальный отрезок, входящий в R_{k_1} (по построению он существует и единствен); если это слово стоит в R_{k_1} на месте номер a_1 , пройдем из корня в его вершину-потомок номер a_1 , а найденный начальный отрезок из последовательности η удалим. По-

¹Словом над алфавитом $\{0, 1\}$ называется конечная последовательность из нулей и единиц.

следовательность из нулей и единиц, оставшуюся после удаления этого отрезка, обозначим η_1 .

Пусть теперь из вершины первого уровня, в которую мы пришли, исходит k_2 ребер, соединяющих ее с вершинами второго уровня; найдем в последовательности η_1 начальный отрезок, входящий в R_{k_2} , обозначим его номер в этой последовательности через a_2 и продолжим наш путь, перейдя в вершину второго уровня, имеющую номер a_2 среди потомков вершины первого уровня, в которую мы пришли перед этим; найденный начальный отрезок из η_1 удалим, и так далее. Продолжая по индукции, получим некоторый путь в бесконечном дереве — это и есть $g(\eta)$.

Из построения ясно, что f и g — взаимно обратные биекции и что они непрерывны. Следовательно, Y и X гомеоморфны. $\square$

Следствие 7.5. Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$ задано конечное множество A_i , содержащее более одного элемента; зададим на каждом из A_i дискретную топологию. Тогда пространство $Y = \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ гомеоморфно канторову множеству. В частности, канторову множеству гомеоморфно всякое кольцо целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$.

Теорема 7.6. Пусть K — компактное метрическое пространство. Тогда существует непрерывное сюръективное отображение $f: X \rightarrow K$, где X — канторово множество.

Доказательство. Заметим, что если K — произвольное компактное метрическое пространство и $\varepsilon > 0$, то K представимо в виде объединения конечного числа непустых замкнутых подмножеств диаметра $\leq \varepsilon$ (диаметром подмножества метрического пространства называется верхняя грань расстояний между его точками). В самом деле, K покрывается конечным числом открытых шаров радиуса $\varepsilon/2$, и в качестве искомых замкнутых подмножеств можно взять замкнутые шары с теми же центрами и радиусами.

Имея в виду это наблюдение, зафиксируем стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$. Теперь представим наше пространство K в виде объединения конечного числа множеств диаметра $\leq \varepsilon_1$ (назовем их подмножествами первого уровня); каждое подмножество первого уровня также компактно, так что его можно представить в виде конечного объединения замкнутых подмножеств диаметра $\leq \varepsilon_2$ (назовем их подмножествами второго уровня); каждое подмножество второго уровня представим в виде конечного объединения замкнутых подмножеств диаметра $\leq \varepsilon_3$, и т. д.

Построим исходя из этих разбиений следующее бесконечное дерево. Каждому подмножеству первого ранга сопоставим вершину первого уровня. Если подмножество первого уровня, соответствующее вершине первого уровня v , представимо в виде объединения подмножеств второго уровня $V_1, \dots, V_k$, то сопоставим им k вершин второго уровня $v_1, \dots, v_k$ и соединим v с каждой из v_k , и т. д. (Если покрытие какого-то из множеств состоит только из одного множества следующего уровня, посчитаем это множество дважды, чтобы дерево удовлетворяло условиям теоремы 7.4.)

Пусть X — пространство путей в построенном дереве. Заметим, что пересечение замкнутых подмножеств в K , соответствующих вершинам, встречающимся на этом пути, состоит ровно из одной точки. В самом деле, обозначим эти вложенные непустые компактные подмножества через $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$; тогда пересечение любого конечного набора множеств K_i непусто, так что объединение любого конечного набора открытых множеств вида $K \setminus K_i$ не является покрытием пространства K , и поэтому, ввиду компактности K , все множества $K \setminus K_i$ не могут образовывать его покрытия. Далее, поскольку диаметры множеств K_i стремятся к нулю, непустое множество $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ состоит из одной точки, что и утверждалось. Положим $f(x)$ равным этой точке.

Отображение f сюръективно, так как всякая точка $y \in K$ содержится в каком-то множестве первого уровня, в каком-то лежащем в нем множестве второго уровня и т. д.; оно непрерывно, так как два пути, у которых первые m звеньев совпадают, соответствуют точкам, находящиеся на расстоянии $\leq \varepsilon_m$. $\square$

Следствие 7.7. *Мощность компактного метрического пространства не превосходит мощности континуума.*

С помощью аналогичных рассуждений можно также показать, что всякое компактное и вполне несвязное метрическое пространство без изолированных точек гомеоморфно канторову множеству.

8. Производная

Как известно, производной функции $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in (a; b)$ называется предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(если он существует). Производная функции f в точке x обозначается $f'(x)$, а функция, имеющая производную в точке x , называется *дифференцируемой* в этой точке.

Легко видеть, что число c является производной функции f в точке x тогда и только тогда, когда разность

$$R(x) = f(x + h) - f(x) - ch$$

обладает тем свойством, что $\lim_{h \rightarrow 0} (R(h)/|h|) = 0$. Из этой переформулировки следует, что если функция $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x , то она и непрерывна в точке x .

В математике распространено следующее (несколько вольное) сокращенное обозначение: всякая функция от h , обладающая тем свойством, что ее отношение к $|h|$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, обозначается $o(h)$. (Аналогично, например, про последовательность $\{a_n\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n^2 = 0$, говорят, что $a_n = o(n^2)$.) Пользуясь этим обозначением, можно записать определение производной в виде

$$f(x + h) = f(x) + ch + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Вот пример того, как работает переформулировка с $o(h)$.

Предложение 8.1 (теорема Ферма). Пусть $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, и пусть $x \in (a; b)$ — точка локального экстремума функции f . Тогда $f'(x) = 0$.

Доказательство. Покажем, что если $f'(x) = c \neq 0$, то в точке x локального экстремума быть не может. В самом деле, пусть $R(x) = f(x + h) - f(x) - ch$; тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при $|h| < \varepsilon$ имеем $|R(h)| \leq |c| \cdot |h|/2$. Следовательно, при $|h| < \varepsilon$ знак разности $f(x + h) - f(h)$ такой же, как у числа ch , так что, например, при $c > 0$ имеем $f(x + h) > f(x)$, если $0 < h < \varepsilon$ и $f(x + h) < f(x)$, если $-\varepsilon < h < 0$. Значит, x не является экстремумом. $\square$

С помощью этого же рассуждения (вкупе с соображениями, примененными нами при доказательстве компактности и связности отрезка) можно показать, что функция, производная которой на отрезке положительна, является возрастающей; ниже мы наметим другое доказательство этого факта.

Перечислим известные из школы свойства производных.

Предложение 8.2. (1) Если функция $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ постоянна, то $f'(c) = 0$ для всех $c \in (a; b)$.

(2) Пусть $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, дифференцируемые в точке c , и пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда функция $\lambda f + \mu g$ дифференцируема в точке c и ее производная равна $\lambda f'(c) + \mu g'(c)$.

(3) Пусть $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, дифференцируемые в точке c . Тогда функция fg дифференцируема в точке c и ее производная равна $f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

(4) Пусть $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, дифференцируемые в точке c , и пусть $g(c) \neq 0$. Тогда функция f/g дифференцируема в точке c и ее производная равна $(f'(c)g(c) - f(c)g'(c))/(g(c)^2)$.

Предложение 8.3. Пусть $g: (a; b) \rightarrow (c; d) \subset \mathbb{R}$ и $f: (c; d) \rightarrow \mathbb{R}$ — две функции, причем g дифференцируема в точке $p \in (a; b)$, а f дифференцируема в точке $g(p) \in (c; d)$. Тогда композиция $f \circ g: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, действующая по правилу $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, дифференцируема в точке p , и ее производная в точке p равна $f'(g(p)) \cdot g'(p)$.

Вы легко докажете эти факты самостоятельно (для предложения 8.3 удобно воспользоваться переформулировкой с $o(|h|)$).

В связи с понятием дифференцируемой функции уместно ввести следующие полезные обозначения.

Обозначение 8.4. Пусть $(a; b)$ — открытый интервал на вещественной оси и $r > 0$ — целое число. Будем говорить, что функция *принадлежит классу C^r* , если она r раз дифференцируема на $(a; b)$ и ее r -я производная непрерывна (непрерывные функции будем называть функциями класса C^0). Если функция принадлежит классу C^r для всех $r \geq 0$, то будем говорить, что функция *принадлежит классу C^∞* (или бесконечно дифференцируема).

Отметим еще, что r -я производная функции f в точке x обозначается $f^{(r)}(x)$.

Основной технический факт о производных — «теорема о среднем» — является по существу утверждением о кривых на плоскости.

Непрерывное отображение интервала $(a; b)$ в $\mathbb{R}^2$ будем называть параметризованной плоской кривой. Пусть это отображение задается в виде $\Gamma: t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$; если функции φ и ψ дифференцируемы и при этом производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ никогда не обращаются в нуль одновременно (иными словами, «вектор скорости» $(\varphi'(t), \psi'(t))$ нигде не обращается в нуль), то Γ (или $\Gamma(a; b)$) называется гладкой иммерсированной кривой. Условие необращения в нуль вектора скорости гарантирует, что у кривой нет «изломов».

Теорема 8.5 (теорема о среднем). Пусть $\Gamma: t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ — такое непрерывное отображение отрезка $[a; b]$ в $\mathbb{R}^2$, что функции φ и ψ

дифференцируемы на $(a; b)$, причем для всех t из интервала $(a; b)$ имеем $\Gamma'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t)) \neq (0, 0)$. Положим $\Gamma(a) = A$, $\Gamma(b) = B$, и пусть $A \neq B$. Тогда для некоторого $t \in (a; b)$ вектор $\Gamma'(t)$ параллелен прямой AB .

(См. рис. 3а.)

Доказательство. Ввиду компактности отрезка существует такое $t \in [a; b]$, что расстояние от $\Gamma(t)$ до прямой AB максимально (поскольку при t , равном a или b , это расстояние равно нулю, максимум обязательно реализуется для какого-то $t \in (a; b)$). Покажем, что это t — искомое.

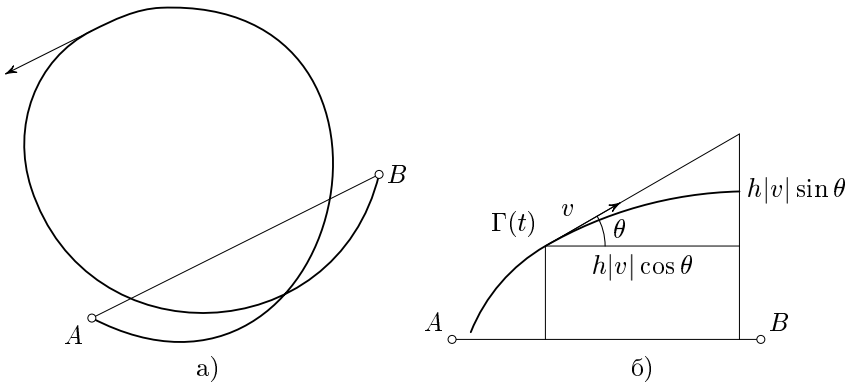


Рис. 3. Теорема о среднем и ее доказательство

В самом деле, в противном случае касательный вектор в точке t (обозначим его $v = (\varphi'(t), \psi'(t))$) образует с отрезком AB ненулевой угол θ . Имеем $\Gamma(t+h) = \Gamma(t) + hv + o(h)$. Следовательно (если обозначить через d расстояние до прямой AB) имеем

$$d(\Gamma(t+h)) = d(\Gamma(t)) + h|v| \sin \theta + O(|h|)$$

(см. рис. 3б), так что для достаточно малого h подходящего знака имеем $d(\Gamma(t+h)) > d(\Gamma(t))$ — противоречие. $\square$

Следствие 8.6 (теорема Лагранжа). Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, дифференцируемая на $(a; b)$. Тогда существует такое число $\xi \in (a; b)$, что $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$.

(Положите $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$.)

Следствие 8.7 (теорема Ролля). Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, дифференцируемая на $(a; b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует такое число $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$. $\square$

Из теоремы Лагранжа немедленно следуют достаточные условия возрастания/убывания («если производная положительна, то функция возрастает...») и достаточные условия экстремума.

Основной факт о производных функций одного переменного — формула Тейлора. Начнем с мотивировок.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — «достаточно хорошая» функция (в частности, мы будем предполагать, что у нее есть столько производных, сколько нам нужно). Попробуем «разложить f в степенной ряд» — найти для нее представление вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (8.1)$$

Сумма в правой части бесконечна, и понимать эту запись следует так:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n).$$

Правда, такое разложение вполне может не существовать (даже для бесконечно дифференцируемых функций!), но мы это проигнорируем и попробуем найти его коэффициенты. Проще всего найти a_0 : полагая $x = 0$ в (8.1), получаем $a_0 = f(0)$. Чтобы найти a_1 , продифференцируем обе части (8.1):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \quad (8.2)$$

(Такое дифференцирование ряда не всегда законно, но мы и на это не посмотрим.) Полагая теперь $x = 0$ в (8.2), находим, что $a_1 = f'(0)$. Аналогичным образом находим и прочие коэффициенты: продифференцировав ряд (8.1) n раз, получаем, что

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots,$$

и полагая в этом равенстве $x = 0$, получаем равенство $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Итак, мы нашли формулу для коэффициентов разложения функции в степенной ряд. Оказывается, что хотя самого разложения может и не существовать, найденные нами коэффициенты всегда дают если не ряд, то по крайней мере асимптотику.

Теорема 8.8. Пусть функция $f: (A; B) \rightarrow \mathbb{R}$ является $n + 1$ раз дифференцируемой. Тогда при $a, x \in (A; B)$ имеем

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \quad (8.3)$$

где $\xi \in \mathbb{R}$ — некоторое число, лежащее между a и x .

Следствие 8.9. Пусть $f: (A; B) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^{n+1} , и пусть $a \in (A; B)$. Тогда

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o(|x - a|^n) \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (8.4)$$

Запись с $o(|x - a|^n)$ означает, как водится, что, если обозначить через $R(x)$ разность $f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n\right)$, то будет иметь место соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x)/|x - a|^n = 0.$$

Доказательство теоремы 8.8. Поскольку $(n + 1)$ -я производная функции не изменится, если вычесть из нее многочлен степени n , можно заменить $f(x)$ на $R(x)$ и считать тем самым, что $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$; доказать при этом надо, что $f(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(x - a)^{n+1}$ для некоторого $\xi \in (a; x)$. Теперь, считая, что $x > a$ (при $x < a$ рассуждение аналогично), применим теорему 8.5 (о среднем) для случая $b = x$, $\varphi(x) = (x - a)^{n+1}$, $\psi(x) = f(x)$. Из теоремы вытекает, что для некоторого $\xi_1 \in (a; x)$ имеем $\psi'(\xi)/\varphi'(\xi) = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$, т. е.

$$\frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - a)^n} = \frac{f(x)}{(x - a)^{n+1}}.$$

Применим еще раз ту же теорему, положив $b = \xi_2$, $\varphi(x) = (x - a)^n/n!$, $\psi(x) = f'(x)$; получим, что для некоторого $\xi_2 \in (a; \xi_1)$ выполнено равенство

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2 - a)^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - a)^n} = \frac{f(x)}{(x - a)^{n+1}}.$$

Продолжим этот процесс; когда дойдем до $(n + 1)$ -й производной, окажется, что для некоторого $\xi_{n+1} \in (a; \xi_n) \subset (a; x)$ имеем

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Остается положить $\xi = \xi_n$. $\square$

Формула (8.3) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. При $n = 0$ она превращается в теорему Лагранжа.

Формула (8.4) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Для ее справедливости достаточно, чтобы f принадлежала к классу C^r ; мы покажем это (в более общей ситуации) во втором семестре. Впрочем, доказательство леммы 18.3 вы можете прочитать уже сейчас.

9. Равномерная сходимость; равномерная непрерывность

Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций (скажем, с вещественными значениями) на каком-то множестве X . Предположим, что для всякой точки $x \in X$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Обозначим этот предел $f(x)$, тогда у нас получится функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$; как говорят, последовательность функций $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к функции f :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{для всех } x \in X. \quad (9.1)$$

Расшифровывая определение предела последовательности, получаем, что соотношение (9.1) означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in X$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. При этом N может (при фиксированном ε) зависеть от x : если $X = [0; 1]$ и функция f_n имеет график как на рис. 4, то $f(x)$ равно нулю при $x \neq 0$ и единице при $x = 0$ и, скажем, при $\varepsilon = 0,1$ не существует такого N , которое годилось бы для всех $x \in [0; 1]$. Сходимость называется равномерной, если от этой зависимости N от x можно уйти.

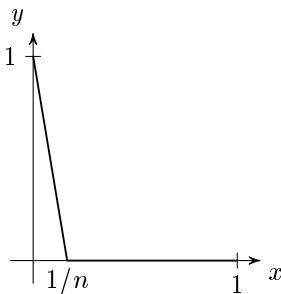


Рис. 4. $y = f_n(x)$

Определение 9.1. Пусть X — произвольное множество, Y — метрическое пространство. Говорят, что последовательность отображений

$f_n: X \rightarrow Y$ является *равномерно сходящейся* (иногда добавляют для ясности: равномерно сходящейся на X) к отображению $f: X \rightarrow Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ имеем $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Из нашего обсуждения ясно, что, если последовательность отображений $\{f_n\}$ равномерно сходится к отображению f , то имеет место и поточечная сходимост: для всякого $x \in X$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Обратное, как мы только что видели, неверно.

Мы только что убедились, что поточечный предел последовательности непрерывных функций может иметь разрывы. С равномерно сходящейся последовательностью эта патология невозможна:

Теорема 9.2. Пусть X — топологическое пространство, Y — метрическое пространство, и пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность отображений из X в Y , равномерно сходящаяся к отображению $f: X \rightarrow Y$. Если все $f_n: X \rightarrow Y$ непрерывны, то и предельное отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. Во-первых, отметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ — это мы уже обсуждали. Чтобы доказать непрерывность функции f , зададимся, согласно определению, числом $\varepsilon > 0$, и пусть $x \in X$. Нам надо доказать, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех y , «достаточно близких» к x (то есть лежащих в некотором открытом подмножестве $U \ni x$). Чтобы оценить расстояние между $f(x)$ и $f(y)$, мы доберемся от $f(x)$ до $f(y)$ за три шага.

Во-вторых, в силу равномерной сходимости найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ и при всех $z \in X$ имеем $\rho(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$. Далее, зафиксируем какое-нибудь $n > N$. Ввиду непрерывности функции f_n найдется такое открытое множество $U \ni x$, что $\rho(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ при всех $y \in U$. Покажем, что для всех $y \in U$ имеем $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. В самом деле:

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(y)) + \rho(f(y), f_n(y)) < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

(первое и третье слагаемые меньше $\varepsilon/3$, так как $\rho(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$ вообще для всех z). Это доказывает искомую непрерывность. $\square$

Взглянем теперь на равномерную сходимость «с научной точки зрения». Пусть X — топологическое пространство и $B(X)$ — векторное пространство ограниченных функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (функция f , определенная на множестве X , называется ограниченной, если существует та-

кое $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in X$). Для всякой $f \in B(X)$ положим $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Неотрицательное число $\|f\|$ называется *нормой* функции f (точнее говоря, *суп-нормой*, но другие нормы нам в ближайшее время не встретятся).

Можно также дословно повторить эти определения, считая, что $B(X)$ — множество ограниченных функций со значениями в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (а не обязательно в $\mathbb{R}$). Мы не будем вводить для этого случая отдельное обозначение; если для справедливости какого-то утверждения существенно, чтобы функции были со значениями именно в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), мы будем это явно указывать.

Суп-норма обладает следующими свойствами.

Предложение 9.3. (1) Пусть $f \in B(X)$. Тогда $\|f\| = 0$ если и только если функция f равна нулю тождественно.

(2) Если $f \in B(X)$ и λ — константа, то $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$.

(3) Если $f, g \in B(X)$, то $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

(4) Если $f, g \in B(X)$, то $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Доказательства всех этих утверждений можно спокойно предоставить читателю.

Если ввести на множестве $B(X)$ метрику по формуле $\rho(f, g) = \|f - g\|$, то $B(X)$ превратится в метрическое пространство.

Из самого определения суп-нормы вытекает, что последовательность функций $f_n \in B(X)$ сходится к функции $f \in B(X)$ в топологии, определяемой суп-нормой, тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к f равномерно на X .

Предложение 9.4. Пространство $B(X)$ является полным.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность ограниченных функций. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{для любого } x \in X \text{ и любых } m, n > N. \quad (9.2)$$

Следовательно, для любого $x \in X$ последовательность чисел $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и тем самым сходится. Положим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Покажем, что $f \in B(X)$ и что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f .

Начнем со второго утверждения. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем N как в соотношении (9.2); зафиксировав $n > N$ и перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим, что

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{для любого } x \in X. \quad (9.3)$$

Ввиду произвольности выбора $n > N$, это доказывает равномерную сходимость.

Далее, для того же ε и фиксированного $n \in \mathbb{N}$ неравенство (9.3) влечет $|f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon$ для всякого $x \in X$. Отсюда $|f(x)| \leq \|f_n\| + \varepsilon$ для всякого x , и функция f ограничена. Все доказано. $\square$

До сих пор мы никак не пользовались тем обстоятельством, что X — топологическое пространство, и все сказанное было бы верно и для случая, когда X — произвольное множество. Теперь введем, однако, такое

Обозначение 9.5. Пусть X — топологическое пространство. Через $C(X)$ обозначается множество всех непрерывных и ограниченных функций на X .

Заметим, что множество $C(X) \subset B(X)$ наследует из $B(X)$ норму, метрику и топологию. Заметим также, что, если X компактно, можно определить $C(X)$ просто как множество непрерывных функций на X .

Предложение 9.6. *Пространство $C(X)$ замкнуто в $B(X)$ и полно.*

Доказательство. Замкнутость вытекает из теоремы 9.2, полнота вытекает из того, что замкнутое подмножество полного метрического пространства будет, очевидно, полным в индуцированной метрике. $\square$

К понятию равномерной сходимости идейно близко еще одно важное общепонятное понятие: равномерная непрерывность.

Определение 9.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение метрических пространств. Это отображение называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только $\rho(x, y) < \delta$.

Ясно, что каждое равномерно непрерывное отображение является непрерывным; обратное, вообще говоря, неверно (пример: $X = Y = (0; +\infty)$ и $f(x) = 1/x$). Тем не менее:

Теорема 9.8. *Пусть X и Y — метрические пространства. Если X компактно и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то f равномерно непрерывно.*

Доказательство. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и для каждого $a \in Y$ рассмотрим множество $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a)) \subset X$. Эти множества образуют открытое покрытие пространства X . Поскольку X компактно, существует «лебегово число» $\delta > 0$ с тем свойством, что для всякого $x \in X$ шар

$B_\delta(x)$ содержится в одном из множеств $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a))$ (лемма 4.20). Поскольку, очевидно, $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, как только x и y содержатся в одном и том же $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(a))$, число δ — искомое. $\square$

10. Интеграл

В качестве приложения понятий равномерной непрерывности и равномерной сходимости мы построим простую теорию интегрирования. Реально нам будут нужны интегралы от непрерывных функций (в крайнем случае кусочно-непрерывных), но технически удобнее работать с более широким классом. Начнем с определений.

Определение 10.1. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *кусочно-непрерывной*, если существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, что для каждого i функция f непрерывна на интервале $(a_i; a_{i+1})$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a_i+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a_{i+1}-0} f(x)$.

Далее последовательность чисел $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ будем называть *разбиением* отрезка $[a; b]$.

Определение 10.2. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *ступенчатой*, если существуют такие числа $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, что функция f постоянна на каждом интервале $(a_i; a_{i+1})$.

(Условий на значения функции в точках a_i не накладывается.) Заметим, что ступенчатые функции образуют векторное пространство; мы будем его обозначать $PC([a; b]) \subset B([a; b])$ (напомним, что в предыдущей лекции через B было обозначено пространство ограниченных функций).

Надо полагать, что читатель знаком с интуитивной трактовкой интеграла по отрезку $[a; b]$ от функции с вещественными значениями как площади фигуры, ограниченной ее графиком, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (участки фигуры, лежащие ниже оси абсцисс, считаются со знаком минус). Эта интерпретация мотивирует следующее определение интеграла от *ступенчатой* функции.

Определение 10.3. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок и $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, ступенчатая относительно разбиения $a_1, \dots, a_n$. *Интегралом* от функции f по отрезку $[a; b]$ называется сумма

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot c_i,$$

где c_i — значение функции f на интервале (a_{i-1}, a_i) .

Интеграл от ступенчатой функции f по отрезку $[a; b]$ обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Предложение 10.4. *Интеграл от ступенчатой функции обладает следующими свойствами.*

(1) *Интеграл по отрезку $[a; b]$ от ступенчатой функции f не зависит от выбора разбиения отрезка, относительно которого f будет ступенчатой.*

(2) *Если f, g — ступенчатые функции на отрезке $[a; b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(3) *Если f — ступенчатая функция на отрезке $[a; b]$, то*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \|f\|$$

(напомним, что $\|f\| = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$).

Доказательство. Пункты (1) и (2) предоставляются читателю. Для доказательства пункта (3) заметим, что, если f ступенчата относительно $a_1, \dots, a_n$ и c_i — ее значение на $(a_{i-1}; a_i)$, то $|c_i| \leq \|f\|$ для всех i , так что $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sum (a_i - a_{i-1}) |c_i| \leq \sum (a_i - a_{i-1}) \|f\|$. $\square$

Теперь распространим определение интеграла на более широкий класс функций.

Определение 10.5. Обозначим через $QC([a; b])$ замыкание (относительно $\sup$ -нормы) подпространства ступенчатых функций в $B([a; b])$. Всякая функция $f \in QC([a; b])$ называется *хорошей* (термин необщепринятый).

Замечание 10.6. Из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ вытекает, что $QC([a; b])$ также является векторным подпространством в $B([a; b])$.

Проверим, что непрерывные и кусочно-непрерывные функции являются хорошими.

Предложение 10.7. *Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, является хорошей.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a; b]$; достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция g , для которой $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Это делается так. Поскольку ввиду теоремы 9.8 функция f равномерно непрерывна на $[a; b]$, найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - y| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Если $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ — разбиение отрезка $[a; b]$ на отрезки длины, меньшей δ , и g — ступенчатая функция, у которой значение на каждом интервале вида $[a_i; a_{i+1})$, где $0 \leq i < n$, равно $f(a_i)$, а значение в b равно $g(b)$, то функция g , очевидно, будет искомой. $\square$

Следствие 10.8. *Всякая кусочно-непрерывная функция является хорошей.* $\square$

Теперь распространим определение интеграла с кусочно-непрерывных функций на хорошие. Это делается с помощью следующего общего факта.

Предложение 10.9. *Пусть Y — подмножество в метрическом пространстве X , и пусть C — полное метрическое пространство. Если $f: Y \rightarrow C$ — равномерно непрерывное отображение, то оно продолжается, причем единственным образом, до непрерывного отображения $\bar{f}: \bar{Y} \rightarrow C$, где $\bar{Y}$ — замыкание Y .*

Следствие 10.10. *Если $f: Y \rightarrow C$ — равномерно непрерывное отображение из метрического пространства Y в полное метрическое пространство C , то оно продолжается, причем единственным образом, до непрерывного отображения из пополнения Y в C .*

Доказательство предложения. Единственность продолжения очевидна (для этого не нужна ни равномерная непрерывность, ни полнота C): если $y \in \bar{Y}$ и $y = \lim y_n$, где $y_j \in Y$, то с неизбежностью $\bar{f}(y) = \lim f(y_n)$.

Для доказательства существования заметим, что если $y = \lim y_n$, где $y_j \in Y$, то последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(f(u), f(v)) < \varepsilon$, как только $\rho(u, v) < \delta$. Поскольку последовательность $\{y_n\}$ сходится, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(y_m, y_n) < \delta$, как только $m, n \geq N$; следовательно, $\rho(f(y_m), f(y_n)) < \varepsilon$, как только $m, n \geq N$, так что последовательность $\{f(y_n)\}$ фундаментальна и тем самым сходится.

Далее, заметим, что если $\lim y_n = \lim y'_n$, то $\lim f(y_n) = \lim f(y'_n)$: в самом деле, $\lim y_n = \lim y'_n$ тогда и только тогда, когда $\lim \rho(y_n, y'_n) = 0$, и из этого равенства и равномерной непрерывности f вытекает, что $\lim \rho(f(y_n), f(y'_n)) = 0$. Поэтому определение $\bar{f}$ по формуле $\bar{f}(y) = \lim f(y_n)$, где $y = \lim y_n$ и все y_j лежат в Y , является корректным.

Остается показать, что функция $\bar{f}$ непрерывна на $\bar{Y}$. Покажем, что она даже равномерно непрерывна. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Так как f равномерно непрерывна на Y , существует такое $\delta > 0$, что если $u, v \in Y$ и $\rho(u, v) < \delta$, то $\rho(f(u), f(v)) < \varepsilon/3$. Покажем, что если $\rho(x, y) < \delta/2$, то $\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) < \varepsilon$. В самом деле, пусть $x, y \in \bar{Y}$, причем $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, и все x_j, y_j лежат в Y . Поскольку, очевидно, $\rho(x, y) = \lim \rho(x_n, y_n)$ и $\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) = \lim \rho(f(x_n), f(y_n))$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(f(x_n), f(x)) < \varepsilon/3$, $\rho(f(y_n), f(y)) < \varepsilon/3$ и $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| < \delta/2$; из последнего неравенства вытекает, что $\rho(x_n, y_n) < \delta$, откуда $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/3$. Значит,

$$\begin{aligned} \rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) &\leq \\ &\leq \rho(f(x_n), \bar{f}(x)) + \rho(f(y_n), \bar{f}(y)) + \rho(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Обозначим теперь через $I: PC([a; b]) \rightarrow \mathbb{C}$ отображение, ставящее в соответствие функции ее интеграл. Из предложения 10.4(3) вытекает, что если $\|f - g\| < \varepsilon/(b - a)$, то $|I(f) - I(g)| < \varepsilon$, так что отображение I равномерно непрерывно на $PC([a; b])$. В силу предложения 10.9 это отображение единственным образом продолжается на пространство $QC([a; b])$ хороших функций. Это продолжение мы и будем называть интегралом. Из доказательства предложения 10.9 ясно, что $\int_a^b g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$, где $\{g_n\}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к g .

Из предложения 10.4 немедленно вытекает ряд свойств интеграла от хороших функций.

Предложение 10.11. *Интеграл от хорошей функции обладает следующими свойствами.*

(1) Если f, g — хорошие функции на отрезке $[a; b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(2) Если f — хорошая функция на отрезке $[a; b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \|f\|.$$

(3) Если f, g — хорошие функции с вещественными значениями и $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

(4) Если f — хорошая функция на отрезке $[a; b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Доказательство. Утверждения (1) и (2) очевидны. Утверждение (3) мы докажем лишь для случая, когда функции f и g кусочно-непрерывны (в других ситуациях оно нам не понадобится). Ввиду (1), для этого достаточно показать, что интеграл от неотрицательной кусочно-непрерывной функции φ также будет неотрицателен. Из доказательства предложения 10.7 видно, что в этом случае ступенчатые функции g_n , аппроксимирующие φ , можно выбрать неотрицательными, так что интеграл от φ будет неотрицателен как предел последовательности неотрицательных чисел.

Утверждение (4) вытекает из предложения 10.4(3), поскольку при переходе к пределу нестрогие неравенства сохраняются. $\square$

Покажем, наконец, что интеграл «коммутирует с равномерной сходимостью»:

Предложение 10.12. Если последовательность функций f_n , хороших на отрезке $[a; b]$, равномерно сходится к хорошей функции f , то
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Доказательство. По построению интеграл является непрерывной функцией на $QC([a; b])$. $\square$

Если заменить равномерную сходимость на поточечную, предложение 10.12 станет неверным; в качестве примера можно рассмотреть последовательность функций $g_n = n f_n$ на отрезке $[0; 1]$, где f_n — функция с рис. 4.

Теперь докажем основную теорему о связи дифференцирования и интегрирования.

Теорема 10.13 (формула Ньютона—Лейбница). Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Определим функцию $F: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Тогда для всякого $x \in (a; b)$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in (a; b)$; для всякого $h > 0$ обозначим через $M(h)$ (соотв. $m(h)$) наибольшее (соотв. наименьшее) значение функции f на отрезке $[x; x + h]$; если $h < 0$, то через $M(h)$

и $m(h)$ обозначим наибольшее и наименьшее значение этой функции на $[x - h; x]$. Из непрерывности функции f в точке x легко следует (проверьте это самостоятельно), что $\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = \lim_{h \rightarrow 0} m(h) = f(x)$.

Далее, поскольку $F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x) dx$, из предложения 10.11(3) вытекает, что для всякого $h \neq 0$ имеют место неравенства

$$m(h) \leq \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \leq M(h).$$

Устремляя в этих неравенствах h к нулю, получаем наше утверждение. $\square$

Вот другой вариант формулы Ньютона—Лейбница.

Теорема 10.14. Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на некотором открытом множестве, содержащем $[a; b]$, и пусть функция $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ обладает тем свойством, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (10.1)$$

Доказательство. Положим $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$. По самому определению $\tilde{F}$ имеем $\int_a^b f(x) dx = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Формула (10.1) будет теперь следовать из того, что разность $\tilde{F}(x) - F(x)$ не зависит от x , а это, в свою очередь, немедленно вытекает из следующей леммы:

Лемма 10.15. Пусть непрерывная функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда функция f постоянна на $[a; b]$.

Остается доказать лемму. Для этого заметим, что для всякого $x \in [a; b]$ имеем, в силу следствия 8.6, $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a) = f(a)$. $\square$

Формула Ньютона—Лейбница открывает широкие возможности для явного нахождения интегралов от различных функций. Мы этим заниматься не будем, но приведем все же два следствия из нее, на которых такие вычисления основываются; первое из них (формула интегрирования по частям) вытекает из формулы для производной произведения, а второе (формула подстановки) — из формулы для производной сложной функции (предложение 8.3).

Предложение 10.16. Пусть f и g — функции класса C^1 в некоторой окрестности отрезка $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad (10.2)$$

Предложение 10.17. Пусть φ — возрастающая функция класса C^1 в некоторой окрестности отрезка $[a; b]$ и f — функция класса C^1 на отрезке $[\varphi(a); \varphi(b)]$. Тогда

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (10.3)$$

Замечание 10.18. Изложенный здесь способ построения элементарной теории интегрирования принадлежит Коши. Для более серьезных приложений интеграла требуется более общая теория («интеграл Лебега»), речь о которой пойдет во втором семестре.

11. Ряды

Рассмотрим пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве X . Как объяснялось в лекции 9, если его снабдить $\sup$ -нормой, то оно станет полным метрическим пространством.

Определение 11.1. *Рядом* называется формальная бесконечная сумма

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots, \quad (11.1)$$

где все f_j лежат в $C(X)$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ положим $s_n = f_1 + \dots + f_n$; эта сумма называется *n -й частичной суммой*.

Ряд (11.1) называется *сходящимся*, если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Этот предел называется *суммой ряда*.

Ряд $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ записывают иногда также как $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

Замечание 11.2. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$; ряд $f_1 + f_2 + \dots$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $f_{n_0} + f_{n_0+1} + \dots$. В самом деле, последовательности частичных сумм этих двух рядов отличаются друг от дружки сдвигом на константу.

Поскольку каждое число можно рассматривать как постоянную функцию на X , ряды, члены которых — просто числа, также охватываются определением 11.1; « $\sup$ -норма» числа — это, конечно, всего лишь

его модуль. Можно было бы также считать f_n элементами любого «полного нормированного векторного пространства».

Критерий Коши для рядов переформулируется следующим образом.

Предложение 11.3. *Ряд $f_1 + \dots + f_n + \dots$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n + \dots + f_{n+m}\| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $m \geq 0$.*

Определение 11.4. Ряд $f_1 + f_2 + \dots$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд из норм его членов $\|f_1\| + \|f_2\| + \dots$ сходится.

Предложение 11.5. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. В силу абсолютной сходимости для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n\| + \dots + \|f_{n+m}\| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $m \geq 0$. Из неравенства треугольника получаем, что тогда и по-прежнему $\|f_n + \dots + f_{n+m}\| < \varepsilon$, так что наш ряд сходится по предложению 11.3. $\square$

Заметим, что благодаря доказанному предложению фраза «ряд абсолютно сходится» перестает звучать двусмысленно. Заметим также, что ряд, абсолютно сходящийся по нашему определению, автоматически является равномерно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими хорошими свойствами, позволяющими работать с ними почти как с обычными конечными суммами. Первый и основной пример тому — перестановка членов ряда.

Определение 11.6. Пусть $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ — ряд. Его *перестановкой* называется ряд $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \dots + f_{\varphi(n)} + \dots$, где $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на себя; мы будем называть такие функции *перестановками множества $\mathbb{N}$* .

Говоря более простым языком, перестановка членов ряда — это ряд, в котором те же самые функции записаны в другом порядке, при этом в новом ряде все члены старого встречаются, причем ровно по одному разу. Например, ряд

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_2 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_4 + f_{13} + f_{15} + f_{17} + f_6 + \dots$$

(три нечетных, одно четное, три нечетных, одно четное, ...) — перестановка ряда $f_1 + f_2 + f_3 + \dots$.

Теорема 11.7. *Пусть $f_1 + \dots + f_n + \dots$ — абсолютно сходящийся ряд, и пусть φ — перестановка множества $\mathbb{N}$. Тогда ряд $f_{\varphi(1)} + f_{\varphi(2)} + \dots + f_{\varphi(n)} + \dots$ также абсолютно сходится, причем к той же сумме.*

Эта теорема вытекает из двух следующих лемм, представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 11.8. *Если $a_1 + \dots + a_n + \dots$ — ряд из неотрицательных вещественных чисел, то этот ряд сходится тогда и только тогда, когда множество сумм вида $a_S = \sum_{i \in S} a_i$, где S пробегает все конечные подмножества в $\mathbb{N}$, ограничено; если это условие выполняется, то сумма ряда равна верхней грани этого множества.*

Доказательство. Поскольку частичные суммы нашего ряда образуют монотонно возрастающую последовательность, он сходится тогда и только тогда, когда суммы вида $a_1 + \dots + a_n = a_{\{1, 2, \dots, n\}}$ ограничены, причем сумма ряда в этом случае равна верхней грани таких сумм. Поскольку всякое конечное подмножество $S \subset \mathbb{N}$ содержится в некотором множестве вида $\{1, 2, \dots, n\}$, и при этом $a_S \leq a_1 + \dots + a_n$, множества $\{a_S\}_{S \subset \mathbb{N}}$ конечно и $\{a_1 + \dots + a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничены одновременно и их верхние грани совпадают. $\square$

Из доказанной леммы явствует, что ряд $\sum \|f_n\|$ сходится тогда же, когда сходится $\sum \|f_{\varphi(n)}\|$; стало быть, мы доказали первую половину теоремы: абсолютная сходимость ряда влечет абсолютную сходимость любой его перестановки.

Лемма 11.9. *Пусть $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ — абсолютно сходящийся ряд в $C(X)$. Тогда $f \in C(X)$ является его суммой тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $S \subset \mathbb{N}$, что для всякого конечного $T \supset S$, содержащегося в $\mathbb{N}$, имеем*

$$\left\| f - \sum_{i \in T} f_i \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие из леммы, и пусть $S \subset \mathbb{N}$ — конечное подмножество, соответствующее данному $\varepsilon > 0$. Если $N \in S$ — наибольший элемент, то при всех $n \geq N$ имеем $\{1, \dots, n\} \supset S$, так что $\|f - (f_1 + \dots + f_n)\| < \varepsilon$ и f — сумма ряда.

Обратно, пусть ряд абсолютно сходится к $f \in C(X)$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $\|f - (f_1 + \dots + f_N)\| < \varepsilon/2$ и при этом (ввиду сходимости ряда $\|f_1\| + \|f_2\| + \dots + \|f_n\| + \dots$) имеем $\|f_n\| + \dots + \|f_{n+m}\| < \varepsilon/2$ при всех $n > N$ и $m \geq 0$; из последнего неравенства следует, что если $U \subset \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, N\}$ — конечное множество, то $\sum_{j \in U} \|f_j\| < \varepsilon/2$. Покажем, что для данного ε можно положить

$S = \{1, \dots, N\}$. В самом деле, если $T \supset \{1, \dots, N\}$ — произвольное конечное множество натуральных чисел, то

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i \in T} f_i \right\| &\leq \|f - (f_1 + \dots + f_N)\| + \left\| \sum_{j \in T \setminus \{1, \dots, N\}} f_j \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j \in T \setminus \{1, \dots, n\}} \|f_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Все доказано. $\square$

Лемма 11.9 выражает условие « f является суммой абсолютно сходящегося ряда $\sum f_i$ » в виде, не меняющемся при перестановке членов ряда, так что тем самым доказана и вторая половина теоремы 11.7.

Условие абсолютной сходимости в этой теореме отбросить нельзя. Приведем

Пример 11.10. Рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \quad (11.2)$$

Этот ряд сходится: в самом деле, обозначая n -ю частичную сумму через s_n , имеем, очевидно, $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \dots$ и $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \dots$, и $s_{2m-1} \geq s_{2m}$ для всех $m \in \mathbb{N}$; значит, последовательности $\{s_{2m-1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ и $\{s_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ сходятся, будучи монотонно возрастающими и ограниченными, а поскольку их разность s_{2m} стремится к нулю, эти два предела равны и являются пределом частичных сумм нашего ряда. (Приведенное рассуждение годится и в общем случае: ряд из вещественных чисел, абсолютные величины которых монотонно убывают и стремятся к нулю, а знаки чередуются, обязательно сходится; это утверждение называется признаком Лейбница.) Абсолютная сходимость ряда (11.2) места не имеет, так как $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Заметим, что ряд, составленный из положительных членов нашего ряда, расходится, а все отрицательные члены нашего ряда по модулю меньше единицы. Теперь переставим ряд так: сначала поставим только положительные члены в таком количестве, чтобы их сумма была больше 11, затем поставим $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — частичная сумма будет больше 10, затем добавим столько следующих положительных членов, чтобы частичная сумма стала больше 21, затем $\left(-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ — частичная сумма будет больше 20, затем столько следующих положительных членов, чтобы частичная сумма стала больше 31, затем $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, и т. д. Легко видеть, что частичные суммы

полученного ряда неограниченны, так что переставленный ряд расходится.

(Нетрудно показать, что, переставляя члены неабсолютно сходящегося ряда из вещественных чисел, можно добиться, чтобы последовательность частичных сумм имела любой наперед заданный предел и даже любые наперед заданные верхний и нижний пределы; определение верхнего и нижнего пределов см. в следующем разделе — предложение 12.4.)

Следующее предложение является частным случаем «теоремы Фубини» из теории меры.

Предложение 11.11. Пусть $\{f_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ — семейство элементов пространства $C(X)$, занумерованное парами натуральных чисел. Предположим, что ряд $\sum_{m,n \in \mathbb{N}} f_{mn}$ абсолютно сходится, и пусть f — его сумма (ввиду предложения 11.7 ни абсолютная сходимость, ни f не зависят от того, в каком порядке пронумеровать пары $(m; n)$). Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ абсолютно сходятся ряды $\sum_{i \in \mathbb{N}} f_{mi}$ (обозначим его сумму h_m) и $\sum_{i \in \mathbb{N}} f_{im}$ (обозначим его сумму v_m). Далее, ряды $\sum_m h_m$ и $\sum_m v_m$ оба абсолютно сходятся к $f = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} f_{mn}$.

Иными словами, сумму элементов абсолютно сходящейся бесконечной матрицы можно подсчитать, найдя суммы каждой строки (или каждого столбца) и сложив все эти суммы.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \sum_{i,j} \|f_{ij}\|$. Для всякого m имеем $\sum_i \|f_{mi}\| \leq \Sigma$, $\sum_i \|f_{im}\| \leq \Sigma$ (так что абсолютно сходятся все строки и все столбцы); так как $\|h_m\| \leq \sum_i \|f_{mi}\|$, то $\sum_m \|h_m\| \leq \Sigma$, и ряд $\sum h_m$ (а также, естественно, $\sum v_m$) также абсолютно сходится.

Докажем теперь, что $\sum h_m = f$ (доказательство для $\sum v_m$ аналогично). Для этого зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и найдем по нему $N \in \mathbb{N}$, обладающее тем свойством, что если $S \supset \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ — конечное подмножество в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то $\left\| f - \sum_{(i,j) \in S} f_{ij} \right\| < \varepsilon/2$ и $\left| \Sigma - \sum_{(i,j) \in S} \|f_{ij}\| \right| < \varepsilon/2$ (первое возможно ввиду леммы 11.9, второе — ввиду определения Σ). Покажем, что при всяком $n \geq N$ имеем $\|f - (h_1 + \dots + h_n)\| \leq \varepsilon$.

В самом деле,

$$\|f - (h_1 + \dots + h_n)\| \leq \left\| f - \sum_{i,j \leq n} f_{ij} \right\| + \left\| (h_1 + \dots + h_n) - \sum_{i,j \leq n} f_{ij} \right\|. \quad (11.3)$$

Первое слагаемое в правой части меньше $\varepsilon/2$ ввиду нашего выбора n . Чтобы оценить второе слагаемое, заметим, что вообще для всяких j и m имеем

$$\left\| h_j - \sum_{k=1}^n f_{jk} \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{jk} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_{jk}\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| (h_1 + \dots + h_n) - \sum_{i,j \leq n} f_{ij} \right\| &\leq \left\| h_1 - \sum_{k=1}^n f_{1k} \right\| + \dots + \left\| h_n - \sum_{k=1}^n f_{nk} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\|f_{1k}\| + \dots + \|f_{nk}\|). \end{aligned}$$

Сумма ряда в правой части является верхней гранью конечных сумм чисел $\|f_{pq}\|$, где $p \leq n$, $q > n$. По нашему выбору n каждая такая сумма меньше $\varepsilon/2$, так что их верхняя грань не превосходит $\varepsilon/2$. Стало быть, правая часть в 11.3 меньше ε . Предложение доказано. $\square$

Следствие 11.12. *В условиях предложения 11.11, если двойной ряд $\sum f_{mn}$ абсолютно сходится, то суммы рядов $\sum h_m$ и $\sum v_m$ совпадают.*

Следующее хорошее свойство абсолютно сходящихся рядов относится к умножению рядов. Мы будем пользоваться неравенством $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ (предложение 9.3(4)).

Начнем, как водится, с мотивировок. Предположим, что у нас имеются два «степенных ряда» вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ и $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$. Если их перемножить и привести подобные члены (чисто формально), то получится ряд вида

$$\begin{aligned} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\ \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n + \dots \end{aligned} \quad (11.4)$$

Обобщая (11.4) на произвольные ряды, получаем такое

Определение 11.13. Пусть $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ и $g_1 + g_2 + \dots + g_n + \dots$ — два ряда. Их *произведением* называется ряд $h_1 + h_1 + \dots + h_n + \dots$, где $h_n = f_0g_n + f_1g_{n-1} + \dots + f_ng_0$.

Предложение 11.14. Пусть $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ и $g_1 + g_2 + \dots + g_n + \dots$ — два абсолютно сходящихся ряда, и пусть $h_1 + h_1 + \dots + h_n + \dots$ — их произведение. Тогда ряд $\sum h_i$ также абсолютно сходится, причем его сумма равна произведению сумм рядов $\sum f_i$ и $\sum g_j$.

Доказательство. Поскольку ряды $\sum f_i$ и $\sum g_i$ абсолютно сходятся, всякая конечная сумма вида $\sum \|f_i g_j\|$ не превосходит $\sum \|f_i\| \cdot \|g_j\|$, что, в свою очередь, не превосходит $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|\right)$; стало быть, двойной ряд $\sum f_i g_j$ абсолютно сходится. Если упорядочить его члены так же, как в доказательстве предложения 11.11, то в число частичных сумм войдут произведения

$$\sum_{i,j=1}^n f_i g_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j\right);$$

поэтому сумма двойного ряда $\sum f_i g_j$ равна произведению сумм рядов $\sum f_i$ и $\sum g_j$. Если, с другой стороны, упорядочить члены этого двойного ряда «по диагоналям», так, чтобы сначала перечислялись все слагаемые, для которых $i + j = 2$, затем все слагаемые, у которых $i + j = 3$, и т. д., то в число частичных сумм войдут все частичные суммы ряда $\sum h_i$, так что сумма двойного ряда $\sum f_i g_j$ равна сумме ряда $\sum h_k$. Все доказано. $\square$

Пример 11.15. Если ни один из перемножаемых рядов не является абсолютно сходящимся, предложение 11.14 перестает быть верным. Пусть, скажем, $\sum f_i$ и $\sum g_i$ — один и тот же знакомый нам ряд $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$. Тогда $(n + 1)$ -й член ряда-произведения равен

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1}} \right),$$

то есть сумме n слагаемых одного знака, каждое из которых по модулю не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{(n+1)/2} \cdot \sqrt{(n+1)/2}} = 2/(n+1)$. Стало быть, общий член к нулю не стремится и произведение рядов расходится.

12. Аналитические функции

Эту лекцию мы посвятим описанию класса функций, ведущих себя «наилучшим возможным образом».

Определение 12.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ (соответственно $U \subset \mathbb{C}$) — открытое множество. Функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ называется *вещественно аналитической* (соответственно *комплексно аналитической*), если локально она

представима в виде суммы степенного ряда: для всякого $c \in U$ существует степенной ряд вида

$$a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots, \quad (12.1)$$

сходящийся к $f(x)$ на множестве вида $\{x: |x - c| \leq r\}$ для некоторого $r > 0$ (подразумевается, что r , в частности, достаточно мало, чтобы это множество содержалось в U).

Пример 12.2. Всякий многочлен является аналитической функцией, причем ряд (12.1) сводится в этом случае к конечной сумме: легко видеть, что для всякого многочлена P степени n и всякого числа c верно тождество

$$P(x) = P(c) + P'(c)(x - c) + \frac{P''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n. \quad (12.2)$$

Для многочленов от вещественного переменного это немедленно следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа; кроме того, если понимать производную от многочлена формально, тождество (12.2) нетрудно доказать чисто алгебраически для многочленов над любым полем характеристики 0.

Пример 12.3. Функция $f(x) = 1/x$ аналитична на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В самом деле, для всякого $c \neq 0$ имеем разложение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}(x - c) + \frac{1}{c^3}(x - c)^2 - \frac{1}{c^4}(x - c)^3 + \dots$$

Этот ряд, как легко видеть, сходится на множестве $\{x: |x - c| < |c|\}$. В отличие от предыдущего примера, в данном случае не существует степенного ряда, годящегося для всей области определения функции.

Многое из дальнейшего формулируется и доказывается совершенно одинаково для вещественно- и комплексно-аналитических функций. Если ниже речь пойдет просто об аналитической функции, это будет означать, что утверждение верно (или рассуждение применимо) в обоих этих случаях. А пока давайте разберемся со сходимостью степенного ряда (12.1).

Предложение-определение 12.4. Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ограниченная сверху последовательность действительных чисел. Ее *верхним пределом* называется число (или символ $+\infty$) $\varlimsup_n x_n = \inf_{n \geq n} \sup_{m \geq n} x_m$; если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, полагают $\overline{\lim} x_n = +\infty$. Другое

обозначение для верхнего предела: $\limsup x_n$. У всякой последовательности существует верхний предел; если последовательность ограничена сверху, то он является наибольшей предельной точкой этой последовательности.

(Аналогично, *нижним пределом* ограниченной снизу последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется $\varliminf x_n = \sup_n \inf_{m \geq n} x_m$. Другое обозначение для нижнего предела: $\liminf x_n$.)

Доказательство предложения 12.4 мы опускаем: вы в состоянии провести его самостоятельно. См. задачу 1.24.

Предложение 12.5 (О. Коши—Ж. Адамар). *Рассмотрим ряд (12.1) и положим $R = 1/\varlimsup \sqrt[n]{|a_n|}$ (если в знаменателе ноль, полагаем $R = +\infty$, если в знаменателе $+\infty$, полагаем $R = 0$). Тогда для всякого положительного $r < R$ ряд (12.1) сходится абсолютно по $\sup$ -норме (стало быть, и равномерно) на множестве вида $\{x: |x - c| \leq r\}$. Напротив, при $|x - c| > R$ этот ряд расходится.*

Число R , введенное в формулировке предложения, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а само это предложение называется еще «формулой Коши—Адамара». Множество $\{x: |x - c| < R\}$ называется *кругом сходимости* ряда (12.1) (особенно когда речь идет о функциях комплексного переменного).

Доказательство. Сосредоточимся на случае $R < +\infty$, предоставив остальное читателю. Пусть $r < R$. Тогда $\varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1/r$. Следовательно, существует такое число $\lambda > r$, что для всех n , кроме, быть может, конечного числа, выполнено неравенство $|a_n| < 1/\lambda^n$. На множестве $\{x: |x - c| \leq r\}$ имеем $\|a_n(x - c)^n\| \leq |a_n|r^n$, так что для всех n , кроме конечного числа, имеем $\|a_n(x - c)^n\| < (r/\lambda)^n$. Следовательно, ряд $\sum \|a_n(x - c)^n\|$ сходится, поскольку его частичные суммы оцениваются сверху частичными суммами бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\sum (r/\lambda)^n$ (плюс константа). Тем самым абсолютная сходимость установлена.

Пусть теперь $|x - c| > R$. Тогда $\varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1/|x - c|$, так что для бесконечно большого числа номеров $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| > 1/|x - c|^n$ и $|a_n(x - c)^n| > 1$. Значит, общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. $\square$

Следствие 12.6. *Степенной ряд (12.1) имеет положительный радиус сходимости тогда и только тогда, когда существуют такие числа $C, r > 0$, что $|a_n| \leq Cr^n$ для всех $n > N$ (короче можно сказать: тогда и только тогда, когда $|a_n| = O(r^n)$ для некоторого $r > 0$). $\square$*

Если этот предел существует, он называется *производной* функции f в точке p . Если функция f дифференцируема во всех точках $p \in U$, она называется *голоморфной*¹ на множестве U .

Легко видеть, например, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ степенная функция $f(z) = z^n$ является голоморфной, причем $f'(z) = nz^{n-1}$, как и в вещественном случае.

Предложение 12.12. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $s \in U$ и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Тогда она дифференцируема на U , если $U \subset \mathbb{R}$, и голоморфна на U , если $U \subset \mathbb{C}$; ее производная $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ также аналитична. Более того, если в окрестности точки $s \in U$ функция f представляется в виде (12.1), то f' представляется в окрестности этой точки в виде ряда, полученного почленным дифференцированием ряда (12.1), причем этот ряд сходится в круге сходимости ряда (12.1).

Доказательство. Пусть в окрестности точки s функция f представима в виде суммы ряда (12.1). Мы будем пользоваться обозначениями и предположениями из доказательства предложения 12.9 (в частности, будем считать, что $s = 0$). Из вида двойного ряда (12.4) ясно, что в разложении $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-p)^m$ имеем $b_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i = f(p)$ (что и не удивительно) и $b_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i p^{i-1}$. Очевидно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i(x-p)^{i-1}$ абсолютно сходится на D_r к некоторой непрерывной (на самом деле аналитической, но в данный момент это неважно) функции $g(x)$. Поскольку при $x \neq p$ имеем $g(x) = (f(x) - f(p))/(x-p)$, получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = g(p) = b_1.$$

Значит, функция f дифференцируема (в комплексном смысле, если f комплексно-аналитична) в точке p , и при этом

$$f'(p) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i p^{i-1}. \quad (12.5)$$

Поскольку разложение (12.5) имеет место для всякой точки p , удовлетворяющей условию $|p| < R$, мы получаем, что функция f' аналитична. Наконец, правая часть равенства (12.5) получается почленным дифференцированием из степенного ряда для f . Все доказано. $\square$

¹Называть голоморфные функции просто «дифференцируемыми» не принято.

Замечание 12.13. Из формулы Коши—Адамара нетрудно вывести, что радиус сходимости ряда для f' совпадает с радиусом сходимости ряда для f .

Следствие 12.14. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $c \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и пусть в окрестности c имеет место разложение

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots \quad (12.6)$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. Иными словами, ряд Тейлора аналитической функции в любой точке ее области определения сходится к ней в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Ввиду предложения 12.12 равенство (12.6) можно сколько угодно раз почленно дифференцировать. Положим $x = c$ — найдем a_0 , продифференцируем и положим $x = c$ — найдем a_1 , и т. д. $\square$

Следствие 12.15. Всякая вещественно-аналитическая функция принадлежит классу C^∞ . $\square$

Замечание 12.16. Утверждение, обратное к следствию 12.15, неверно: существуют (и играют важную роль в некоторых вопросах) бесконечно дифференцируемые, но не аналитические функции вещественного переменного. Например, нетрудно показать (см. задачу 1.69), что функция, определенная по формуле

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всем $\mathbb{R}$, причем все ее производные в нуле равны нулю. Значит, f не может быть аналитичной в нуле: ввиду следствия 12.14 степенной ряд вида $\sum a_i x^i$, сходящийся к f , должен быть ее рядом Тейлора в нуле и как таковой должен состоять из одних нулей, но ни в какой окрестности нуля наша функция тождественным нулем не является.

С другой стороны, с функциями комплексного переменного ситуация прямо противоположна: всякая функция, голоморфная на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$, с неизбежностью будет аналитична. Для доказательства этого важного факта нужна дополнительная техника, с которой вы познакомитесь в курсе комплексного анализа.

Наша следующая задача — показать, что класс аналитических функций замкнут относительно всех разумных операций.

Для начала — совсем простое

Предложение 12.17. *Сумма и произведение аналитических функций аналитичны.*

Доказательство. Достаточно показать, что, если $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ — функции, заданные в некоторой окрестности точки $c \in U$ рядами $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$, то функции $f+g$ и fg задаются в некоторой окрестности этой точки степенными рядами, являющимися суммой и произведением этих рядов соответственно. Утверждение про сумму немедленно следует из предложения 11.11, а утверждение про произведение — из предложения 11.14.

Заметим для дальнейшего, что, если радиусы сходимости рядов для f и g равны R_1 и R_2 соответственно, то радиус сходимости рядов для $f+g$ и fg не меньше, чем $\min(R_1, R_2)$. $\square$

Композиция аналитических функций также аналитична:

Предложение 12.18. *Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$, для которой $f(U) \subset V$, где $V \subset \mathbb{C}$ — открытое множество; пусть также $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Тогда функция $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ также аналитична. Это утверждение верно и в тех случаях, когда U (или как U , так и V) является открытым подмножеством в $\mathbb{R}$, а не $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Доказательство проходит одинаково во всех трех случаях, так что мы не будем их различать. Пусть $p \in U$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \dots \quad (12.7)$$

в некоторой окрестности точки p . Тогда

$$g(y) = b_0 + b_1(y-a_0) + b_2(y-a_0)^2 + \dots \quad (12.8)$$

в окрестности точки $f(p) = a_0$. В ряд (12.8) подставим вместо y (формально) правую часть равенства (12.7) (то есть $f(x)$). Поскольку ряд для $y - a_0$ не имеет свободного члена, в полученном выражении можно (опять же формально) раскрыть все внешние скобки (не трогая $(x-p)$) и привести подобные члены, в результате чего получится степенной ряд относительно $x-p$ вида

$$c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2 + c_3(x-p)^3 + \dots, \quad (12.9)$$

где $c_0 = b_0$, $c_1 = b_1a_1$, $c_2 = b_1a_2 + b_2a_1^2$, $c_3 = b_1a_3 + 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3$, ... Для доказательства аналитичности функции $g \circ f$ мы покажем, что в некоторой окрестности точки p этот ряд к ней сходится.

В самом деле, пусть R — радиус сходимости ряда (12.8). Замечание в конце доказательства предложения 12.17 показывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ радиус сходимости ряда

$$h_{n1}(x-p) + h_{n2}(x-p)^2 + \dots + h_{nm}(x-p)^m + \dots,$$

полученного раскрытием внешних скобок (не трогая $(x-p)$) и приведением подобных из $(a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + a_3(x-p)^3 + \dots)^n$, не меньше R , и что этот ряд сходится к $(f(x) - a_0)^n$. Ясно, что ненулевые члены в этом ряде начинаются с $h_{nn}(x-p)^n$. Заметим также, что всякий h_{ij} выражается через $a_0, a_1, a_2, \dots$ как многочлен: $h_{ij} = P_{ij}(a_0, a_1, a_2, \dots)$, причем коэффициенты многочленов P_{ij} являются целыми неотрицательными числами и не зависят от $a_0, a_1, a_2, \dots$.

Рассмотрим теперь двойной ряд

$$\begin{aligned} & b_0 + b_1 h_{11}(x-p) + b_1 h_{12}(x-p)^2 + b_1 h_{13}(x-p)^3 + b_1 h_{14}(x-p)^4 + \dots \\ & + b_2 h_{21}(x-p) + b_2 h_{22}(x-p)^2 + b_2 h_{24}(x-p)^4 + b_2 h_{24}(x-p)^4 + \dots \\ & + b_3 h_{31}(x-p) + b_3 h_{32}(x-p)^2 + b_3 h_{33}(x-p)^3 + b_3 h_{34}(x-p)^4 + \dots \end{aligned} \quad (12.10)$$

Из построения ясно, что ряд, полученный в результате сложения сумм каждой строки, сходится к $g(f(x))$ при всех x , достаточно близких к p , а ряд, полученный в результате сложения сумм каждого столбца (поскольку, как мы отмечали выше, $h_{ij} = 0$ при $j < i$, все эти суммы конечны), совпадает с рядом (12.9). Стало быть, ввиду предложения 11.11 все будет доказано, если мы покажем, что двойной ряд (12.10) сходится абсолютно в некоторой окрестности точки p .

Чтобы сделать это, рассмотрим вспомогательные функции $\tilde{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| z^i$ и $\tilde{g}(y) = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| (y - |a_0|)^i$; поскольку радиусы сходимости рядов, стоящих в правых частях этих равенств, совпадают с радиусами сходимости рядов (12.7) и (12.8) соответственно (и тем самым положительны), функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ определены корректно как аналитические функции в некоторых окрестностях точек 0 и $|a_0|$. Обозначим через R радиус сходимости ряда (12.8) (он же — радиус сходимости ряда для $\tilde{g}$). Поскольку аналитические функции непрерывны, существует такое $r > 0$, что $|\tilde{f}(z) - |a_0|| < R$, как только $|z| \leq r$. Утверждается, что двойной ряд (12.10) абсолютно сходится на множестве $\{x: |x-p| \leq r\}$.

В самом деле, на этом множестве имеем $\|b_i h_{ij}(x-p)^j\| = |b_i| \cdot |h_{ij}| r^j$; поскольку $h_{ij} = P_{ij}(a_0, a_1, a_2, \dots)$ и коэффициенты многочленов P_{ij} неотрицательны, имеем $|h_{ij}| \leq P_{ij}(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots) = \tilde{h}_{ij}$. Однако же двой-

ной ряд с положительными членами

$$\begin{aligned} &|b|_0 + |b|_1 \tilde{h}_{11}r + |b|_1 \tilde{h}_{12}r^2 + |b|_1 \tilde{h}_{13}r^3 + |b|_1 \tilde{h}_{14}r^4 + \dots \\ &+ |b|_2 \tilde{h}_{21}r + |b|_2 \tilde{h}_{22}r^2 + |b|_2 \tilde{h}_{24}r^4 + |b|_2 \tilde{h}_{24}r^4 + \dots \\ &+ |b|_3 \tilde{h}_{31}r + |b|_3 \tilde{h}_{32}r^2 + |b|_3 \tilde{h}_{33}r^3 + |b|_3 \tilde{h}_{34}r^4 + \dots \end{aligned}$$

очевидным образом сходится: его строка номер i сходится к $|b_i|(\tilde{f}(r))^i$, а сумма строк сходится к $\sum b_i(\tilde{f}(r))^i = \tilde{f}(\tilde{g}(r))$. Стало быть, мы можем применить предложение 11.11, на чем доказательство и завершается. $\square$

Теперь докажем, что функция, обратная к аналитической, также аналитична. Разумеется, при этом необходимо потребовать, чтобы исходная функция была взаимно однозначна — иначе обратная функция не определена, — однако же этого недостаточно: функция $f(x) = x^3$ аналитична и взаимно однозначна на всем $\mathbb{R}$, но обратная к ней $g(x) = \sqrt[3]{x}$ даже не дифференцируема в нуле. Чтобы получить корректную формулировку, надо потребовать, чтобы производная не обращалась в нуль.

Предложение 12.19. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ (соотв. $U \subset \mathbb{C}$) — открытое подмножество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (соотв. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$) — аналитическая функция, $p \in U$, $f'(p) \neq 0$. Тогда существует такое открытое подмножество $W \ni f(p)$, что отображение $f: f^{-1}(W) \rightarrow W$ взаимно однозначно, а обратная функция $f^{-1}: W \rightarrow f^{-1}(W)$ аналитична.

Начнем с того, что установим аналитичность функции, обратной к функции $y = x^2$.

Лемма 12.20. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ аналитична на $(0; +\infty)$.

Доказательство леммы. Пусть $a \in (0; +\infty)$. Поскольку, как известно¹, k -я производная функции $y = \sqrt{x}$ — это функция $y = (1/2)(1/2-1) \dots (1/2-k+1)x^{-1/2-k}$, из формулы Тейлора (теорема 8.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{a} + \frac{1}{2}a^{1/2-1}(x-a) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}a^{1/2-2}(x-a)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}a^{1/2-n}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

¹Вот как это можно вывести «из первооснов». Существование и единственность корня степени q (где $q \in \mathbb{N}$) из положительного числа вытекает из теоремы о промежуточном значении и монотонности функции $y = x^q$. Далее прямым вычислением получаем формулу для производной функции $y = x^{1/q}$; формула для производной функции $y = x^{p/q}$ получится, если представить эту функцию в виде композиции корня степени q и возведения в степень p .

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n\right)}{(n+1)!} \xi^{1/2-n-1} (x-a)^{n+1}$$

(ξ лежит между a и x).

Поскольку, очевидно, первый множитель в выражении для $R_{n+1}(x)$ по модулю не превосходит единицы, имеем

$$|R_{n+1}(x)| \leq \sqrt{|\xi|} \left(\frac{|x-a|}{|\xi|} \right)^{n+1} \leq \sqrt{\max(x, a)} \left(\frac{|x-a|}{\min(x, a)} \right)^{n+1}.$$

При $|x-a| < a/3$ имеем $|x-a|/\min(x, a) < 1/2$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$. Стало быть, в этой окрестности точки a функция $y = \sqrt{x}$ представляется в виде степенного ряда, что и доказывает ее аналитичность. $\square$

(Наша оценка весьма груба: на самом деле радиус сходимости степенного ряда для $\sqrt{x}$ в окрестности точки a равен a .)

Доказательство теоремы. Поскольку взятие композиции с линейными функциями вида $x \mapsto kx + b$, где $k \neq 0$, не влияет ни на аналитичность, ни на взаимную однозначность, ни на необращение производной в нуль, можно, не ограничивая общности, считать, что $p = 0$, $f(p) = 0$, $f'(p) = 1$. Запишем разложение f в окрестности нуля в виде $f(x) = x - \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$ (вскоре мы увидим, зачем нужен знак минус), и будем

искать обратную функцию в виде $g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$. Нам надо подобрать коэффициенты b_i таким образом, чтобы после формальной подстановки $x = g(y)$ получился ряд $f(g(y)) = y$.

Лемма 12.21. *Имеем $b_1 = 1$; далее, существуют такие не зависящие от коэффициентов $\{a_i\}$ многочлены $P_2, P_3, \dots$ с положительными коэффициентами, что $b_n = P_n(a_2, a_3, \dots, a_n)$ для всех $n \geq 2$.*

Доказательство леммы. В формальном ряде $x - \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$ подставим $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$, раскроем скобки и приведем подобные; обозначим получившийся ряд относительно y через $\sum c_i y^i$. Для коэффициентов c_i получаются такие формулы:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1; \\ c_2 &= b_2 - a_2 b_1^2; \\ c_3 &= b_3 - (2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3), \end{aligned}$$

и так далее; ясно, что n -я строка этой таблицы имеет вид

$$c_n = b_n - Q_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}),$$

где Q_n — многочлен с положительными коэффициентами (именно ради этой положительности мы поставили знак минус перед $\sum a_i x^i$). Поскольку должно получиться $c_1 = 1$ и $c_n = 0$ при $n > 1$, утверждение леммы получится немедленно, если последовательно выражать b_2 через $b_1 = 1$ и a_2 , затем b_3 через a_2, a_3, b_1 и b_2 и т. д. $\square$

Покажем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$ имеет положительный радиус сходимости. В самом деле, ввиду формулы Коши—Адамара достаточно доказать это для ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| y^i$. Однако же, ввиду леммы 12.21 имеем $|b_i| \leq \tilde{b}_i = P_i(|a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|)$. Далее, поскольку, ввиду следствия 12.6, имеем $|a_n| \leq Cr^n$ для всех $n \geq 2$ и для некоторых положительных констант C и r , имеем, далее, $P_i(|a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|) \leq \tilde{b}_i = P_i(Cr^2, Cr^3, \dots, Cr^n)$. Стало быть, достаточно установить положительность радиуса сходимости ряда $z + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{b}_i z^i$. Ввиду все той же леммы 12.21, этот ряд — формальный обратный для ряда $x + \sum_{i=2}^{\infty} Cr^i x^i$, сходящегося к функции $\tilde{f}(x) = x + \frac{Cr^2 x^2}{1 - rx}$. Формула для корней квадратного уравнения показывает, что в окрестности нуля эта функция имеет обратную

$$\tilde{g}(z) = \frac{-(1 + rz) + \sqrt{(1 + rz)^2 + 4z(Cr^2 - r)}}{2(Cr^2 - r)},$$

и функция $\tilde{g}$ аналитична в окрестности нуля как композиция аналитических (квадратный корень аналитичен ввиду леммы 12.20!). Стало быть, положительный радиус сходимости имеет ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$. Тем самым доказано, что в окрестности $W \ni 0$ определена аналитическая функция g , удовлетворяющая тождеству $f(g(y)) = y$. Положим $U = f^{-1}(W)$; тогда множество U открыто, и отображения $f: U \rightarrow W$ и $g: W \rightarrow U$ аналитичны и взаимно обратны. Все доказано. $\square$

В заключение лекции рассмотрим «принцип аналитического продолжения». В формулировке следующего предложения используется стандартный термин: *нулем* функции f называется любая точка, в которой f обращается в нуль.

Предложение 12.22. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ (или $U \subset \mathbb{C}$) — связное открытое подмножество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Если f не явля-

ется тождественным нулем на U , то множество ее нулей дискретно в U .

Неформально говоря корни уравнения $f(x) = 0$ могут сгущаться к границе области U , но не внутри ее.

Лемма 12.23. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-p)^i$ — степенной ряд с непустым кругом сходимости W , сходящийся на W к функции f . Если p — изолированный нуль функции f , то $a_i = 0$ для всех i .

Доказательство леммы. Если ряд Тейлора для f в точке p не является тождественным нулем, то $f(x) = (x-p)^r g(x)$, где $r > 0$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+r}(x-p)^i$ и $a_r \neq 0$ (ряд в правой части, очевидно, также сходится на W). Следовательно, функция g отлична от нуля в некоторой окрестности точки p , так что p — изолированный нуль. $\square$

Доказательство предложения. Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям предложения. Обозначим через V множество точек, в которых f и все ее производные обращаются в нуль. Это множество с очевидностью замкнуто; кроме того, оно и открыто, поскольку если ряд Тейлора аналитической функции в данной точке является тождественным нулем, то в некоторой окрестности этой точки функция (а значит, и все ее производные) тождественно обращается в нуль. Если f имеет изолированный нуль в U , то ввиду леммы $V \neq \emptyset$, так что $V = U$ ввиду связности. $\square$

Следствие 12.24. Пусть f и g — аналитические функции на открытом связном множестве U , и пусть ограничения f и g на непустое открытое подмножество $W \subset U$ совпадают. Тогда $f = g$ всюду на U .

Следствие 12.24 называется *принципом аналитического продолжения*; оно верно и для аналитических функций многих переменных.

Принцип аналитического продолжения показывает, что аналитическая функция — очень жесткий объект: ее поведение на сколь угодно малом открытом множестве определяет поведение функции в целом. В частности, невозможно, чтобы графики двух аналитических функций совпадали на каком-то интервале, а затем расходились в разные стороны.

Отметим в заключение, что для бесконечно дифференцируемых функций действительного переменного следствие 12.24 неверно (см., например, функцию, тождественно равную нулю, и функцию, рассмотренную в замечании 12.16).

13. Элементарные функции

Теперь мы, наконец, можем дать строгие определения показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Начнем с показательной, причем сразу для комплексных значений аргумента.

Определение 13.1. *Экспонентой* комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется число

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (13.1)$$

Разумеется, надо еще доказать, что ряд (13.1) сходится, что мы сейчас и сделаем.

Предложение 13.2. *Ряд (13.1) сходится абсолютно в sup-метрике (и тем самым равномерно) на любом замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\}$, где $R > 0$.*

Доказательство. В силу формулы Коши—Адамара (предложение 12.5) достаточно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n!} = 0$; это, очевидно, вытекает из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$. В свою очередь, это равенство выполнено, так как для всякого $R > 0$ имеем, при $n > m = [R] + 1$,

$$n! \geq m! R^{n-m} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{m! / R^m} \cdot R,$$

что больше, скажем, $R/2$ при всех достаточно больших n . $\square$

Отметим, что на всем $\mathbb{C}$ (или даже на всем $\mathbb{R}$) равномерная сходимость ряда (13.1) места не имеет.

Стало быть, экспонента — аналитическая функция, определенная на всем $\mathbb{C}$. Отсюда (или прямо из определения) вытекают такие ее свойства.

Предложение 13.3. (1) *Функция $z \mapsto \exp(z)$ непрерывна.*

(2) $\exp(0) = 1$; *если $x \in \mathbb{R}$, то $\exp(x) \in \mathbb{R}$.*

(3) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ (*черта означает комплексное сопряжение*).

Основное свойство экспоненты таково:

Предложение 13.4. *Для любых комплексных чисел z и w имеем $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.*

Доказательство. Если перемножить (в смысле определения 11.13) ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$, то n -й член произведения будет равен

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}w}{(n-1)!1!} + \frac{z^{n-2}w^2}{(n-2)!2!} + \dots + \frac{w^n}{n!},$$

что в силу формулы бинома Ньютона равно $(z + w)^n / n!$; стало быть, в произведении получится ряд для $\exp(z + w)$. Если $R > \max(|z|, |w|)$, то в круге с центром в нуле и радиуса R ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$ сходятся абсолютно, стало быть, ввиду предложения 11.14, их произведение сходится к $\exp(z) \exp(w)$, что и требовалось. $\square$

Следствие 13.5. (1) Если $x \in \mathbb{R}$, то $\exp(x) > 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

Доказательство. (1) Если $x \geq 0$, то это очевидно; если $x < 0$, воспользуемся тем, что, ввиду предложения 13.4, $\exp(x) = 1 / \exp(-x)$.

(2) При $x > 0$ имеем, очевидно, $\exp(x) > 1 + x$, откуда вытекает первое равенство. Второе равенство следует из тождества $\exp(-x) = 1 / \exp(x)$. $\square$

Предложение 12.12 гласит, что всякая аналитическая функция дифференцируема и ряд для ее производной получается формальным дифференцированием из ряда для самой функции; поскольку, как легко видеть, при формальном дифференцировании ряда (13.1) получается тот же самый ряд, мы доказали следующий факт.

Предложение 13.6. Функция $\exp$, рассматриваемая как функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, дифференцируема; ее производная в точке $x \in \mathbb{R}$ равна $\exp(x)$.

(Точно так же функция $\exp$, рассматриваемая как функция из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, голоморфна и совпадает со своей производной.)

Следствие 13.7. Функция $x \mapsto \exp(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, является строго возрастающей и задает взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством положительных действительных чисел.

Доказательство. Это немедленно следует из предложения 13.5(2) и теоремы о промежуточном значении. $\square$

Определение 13.8. Пусть x — положительное действительное число. Его *натуральным логарифмом* называется такое действительное число y , что $\exp(y) = x$. Обозначение: $y = \ln x$.

Ввиду следствия 13.7 это определение корректно.

Предложение 13.9. Функция $x \mapsto \ln x$ аналитична на множестве положительных действительных чисел; ее производная в точке x равна $1/x$.

Доказательство. Поскольку функция $\exp$ аналитична и взаимно однозначна, а производная ее всюду отлична от нуля, обратная к ней функция $\ln$ аналитична ввиду предложения 12.19.

Чтобы подсчитать производную логарифма в точке x , запишем, полагая $x = \exp(y)$ и $x_1 = \exp(y_1)$:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{\ln x_1 - \ln x}{x_1 - x} = \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{y_1 - y}{\exp(y_1) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}.$$

Аналитичность (на самом деле всего лишь непрерывность) логарифма была использована в первом равенстве из нашей цепочки. $\square$

Следствие 13.10. $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$ $\square$

Для логарифма также можно получить разложение в степенной ряд:

Предложение 13.11. Для всякого $x \in (-1; 1)$ имеет место разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (13.2)$$

На всяком отрезке $[a; b] \subset (-1; 1)$ этот ряд сходится абсолютно (по $\sup$ -норме).

Доказательство. На всяком отрезке $[a; b] \subset (-1; 1)$ сходится абсолютно (по $\sup$ -норме) ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

В силу предложения 10.12 этот ряд можно почленно проинтегрировать от нуля до любого t , где $|t| < 1$, откуда получаем разложение (13.2). Поскольку на отрезке $[-r; r] \subset (-1; 1)$ имеем $\|x^n/n\| = r^n/n \leq r^n$, абсолютная сходимость ряда (13.2) следует из сходимости бесконечно убывающей геометрической прогрессии. $\square$

На самом деле равенство (13.2) имеет место и при $x = 1$. Иными словами,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Доказательство этого факта мы опустим.

Замечание 13.12. Мы не случайно определили логарифм, в отличие от экспоненты, только для положительных действительных чисел. Отображение $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является универсальным накрытием неоднозначного пространства $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, так что обратного к нему, определенного на всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, нет и быть не может.

Теперь ничего не стоит определить степень с произвольным положительным основанием.

Определение 13.13. Пусть $a > 0$ — положительное действительное число, z — произвольное комплексное число. Положим по определению $a^z = \exp(z \ln a)$. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x > 0$, положим $\log_a x = \ln x / \ln a$. Положим, наконец, $e = \exp(1)$.

Предоставляем читателю доказать известные из школы свойства логарифмической и показательной функций. Проверьте также, что $\ln e = 1$, $\log_e x = \ln x$ и $\exp(x) = e^x$.

Перейдем к тригонометрическим функциям.

Определение 13.14. Для $x \in \mathbb{R}$ положим по определению

$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)), \quad \sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix)), \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Хорошо знакомые тождества для тригонометрических функций проверяются легко:

Предложение 13.15. *Для тригонометрических функций выполнены такие тождества:*

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1; \tag{13.3}$$

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \tag{13.4}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{13.5}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{13.6}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{13.7}$$

Доказательство. (13.3) вытекает из того, что $\exp(0) = 1$. Чтобы доказать (13.4), достаточно заметить, что, ввиду предложения 13.3(3), при $x \in \mathbb{R}$ имеем $\exp(-ix) = \overline{\exp(ix)}$; из этого же тождества следует, что, опять-таки при $x \in \mathbb{R}$, имеем $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = 1$, откуда получаем (13.5). Наконец, (13.6) и (13.7) получаются, если разделить действительную и мнимую часть в тождестве $\exp(i(x + y)) = \exp(ix) \cdot \exp(iy)$. $\square$

Из тождеств (13.3)—(13.7) чисто формально выводятся все прочие тригонометрические тождества (вспомните, как это делалось в школе), кроме формул приведения, о которых речь пойдет чуть позже.

Простейшие свойства тригонометрических функций также получаются из нашего определения немедленно:

Предложение 13.16. *Функции $\sin$ и $\cos$ аналитичны; для $x \in \mathbb{R}$ имеем $\sin'(x) = \cos x$, $\cos'(x) = -\sin x$. Для синуса и косинуса имеются разло-*

жения в степенные ряды

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots; \quad (13.8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots, \quad (13.9)$$

причем эти ряды сходятся абсолютно по суп-норме на каждом отрезке.

Доказательство. Из предложения 13.6 и правила дифференцирования сложной функции следует, что производная функции $t \mapsto \exp(it)$ в точке $x \in \mathbb{R}$ равна $i \exp(ix)$; отделяя вещественную и мнимую часть, получаем формулы для производных синуса и косинуса.

Полагая в ряде для экспоненты $z = ix$, получаем, что

$$\exp(ix) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots;$$

из предложения 11.11 следует, что ряды

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots,$$

$$S(x) = ix - i \frac{x^3}{3!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} i \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

абсолютно сходятся на любом отрезке, причем $\exp(x) = C(x) + S(x)$. Поскольку, очевидно, число $C(x)$ вещественное, а $S(x)$ — чисто мнимое, получаем, что $C(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \cos x$ и $S(x) = i \operatorname{Im}(\exp(ix)) = i \sin x$. Все доказано. $\square$

Разберемся с формулами приведения.

Предложение 13.17. У уравнения $\cos x = 0$ имеется наименьший положительный корень, обозначаемый $\pi/2$. Имеем $\sin(\pi/2) = 1$, причем на отрезке $[0; \pi/2]$ синус монотонно возрастает, а косинус монотонно убывает.

Доказательство. Мы знаем из формулы (13.3), что $\cos 0 = 1$. Покажем, что $\cos 2 < 0$. В самом деле, из разложения (13.8) имеем

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots = -\frac{1}{3} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{10}}{10!} - \dots \right). \quad (13.10)$$

Представим ряд в скобках в виде

$$\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) + \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!} \right) + \left(\frac{2^{14}}{14!} - \frac{2^{16}}{16!} \right) + \dots$$

Поскольку при $n \geq 6$ имеем, очевидно, $2^n/n! > 2^{n+2}/(n+2)!$, все слагаемые в скобках положительны, откуда и из 13.10 имеем $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$.

Поскольку $\cos 0 = 1 > 0$, теорема о промежуточном значении показывает, что уравнение $\cos x = 0$ имеет положительные корни. Положим теперь $c = \inf\{x > 0: \cos x = 0\}$. Так как косинус — непрерывная функция, множество ее корней замкнуто (как прообраз замкнутого множества $\{0\}$), так что $\cos c = 0$, откуда $c > 0$ и c — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$. Положим, как это принято, $c = \pi/2$. Тогда косинус положителен на интервале $(0; \pi/2)$; так как косинус — производная синуса, синус возрастает на этом интервале и, стало быть (так как $\sin 0 = 0$) положителен на нем. Так как $\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ и $\sin(\pi/2) > 0$, получаем, что $\sin(\pi/2) = 1$. Так как $\cos'(x) = -\sin x$ и $\sin x > 0$ на $(0; \pi/2)$, косинус на этом интервале убывает. $\square$

Следствие 13.18. *Для тригонометрических функций верны формулы приведения (в частности, синус и косинус периодичны с периодом 2π); верны также все известные из школы утверждения о знаках и интервалах монотонности синуса и косинуса.*

Доказательство. Формулы приведения следуют из формул для синуса и косинуса суммы и того, что $\sin(\pi/2) = 1$ и $\cos(\pi/2) = 0$. Утверждения о знаках и интервалах монотонности следуют из формул приведения и предложения 13.10. $\square$

Следствие 13.19. *Функция $\exp$ периодична с периодом $2\pi i$.*

Доказательство. Это следует из того, что $\exp(2\pi i) = 1$. $\square$

Покажем, что отображение $t \mapsto \exp(it)$ действительно осуществляет «наматывание» числовой оси на единичную окружность, которое используется при наивном определении тригонометрических функций числового аргумента. Во-первых:

Предложение 13.20. *Отображение $\varphi: t \mapsto \exp(it)$ индуцирует взаимно однозначное отображение интервала $[0; 2\pi)$ на единичную окружность $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.*

Доказательство. Если отождествить комплексное число $x + iy$ с точкой $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, то отображение φ запишется как $t \mapsto (\cos t; \sin t)$. Из монотонности и непрерывности косинуса на отрезке $[0; \pi/2]$ следует, что при $t \in [0; \pi/2]$ число $\operatorname{Re}(\exp(it))$ принимает каждое значение в интервале $[0; 1]$ ровно один раз; если точка $x + iy$ принадлежит единичной окружности, то y определяется по x однозначно, с точностью

до знака, так что φ индуцирует взаимно однозначное отображение отрезка $[0; \pi/2]$ на множество $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Аналогично рассматриваются отрезки $[\pi/2; \pi]$, $[\pi; 3\pi/2]$, и т. д. $\square$

Далее, покажем, что при отображении $t \mapsto \exp(it)$ точка за время t проходит путь t — это и будет означать, что наматывание числовой оси на окружность происходит «без растяжений и сжатий». Для начала уточним, что такое «путь, пройденный точкой», иными словами, что такое длина кривой. Для большинства разумных целей подходят такие определения. Напомним, что гладкой кривой на плоскости называется отображение $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, действующее по формуле $t \mapsto (x(t), y(t))$, где x и y — функции класса C^1 . Поскольку вектор скорости точки, движущейся по закону $t \mapsto \varphi(t)$, равен $(x'(t); y'(t))$ в момент t , путь, пройденный точкой, естественно считать равным интегралу от длины вектора скорости, то есть $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Этот интеграл и полагают равным длине кривой; нетрудно показать, что длина не зависит от выбора параметризации: если $\psi: [c; d] \rightarrow [a; b]$ — взаимно однозначная функция класса C^1 , то

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_c^d \sqrt{((x \circ \psi)'(u))^2 + ((y \circ \psi)'(u))^2} du$$

(это сразу следует из формулы (10.3)).

Итак, если отождествить число $x + iy \in \mathbb{C}$ с точкой $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, то наше отображение запишется в виде $t \mapsto (\cos t; \sin t)$. Вектор скорости точки в момент t равен $((\cos t)'; (\sin t)') = (-\sin t; \cos t)$; его длина равна $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, так что за время t точка проходит путь t . В частности, за время 2π точка пройдет путь 2π ; ввиду предложения 13.20 это означает, что длина окружности радиуса 1 равна 2π , так что число π , определенное нами в предложении 13.17, является «настоящим».

Отметим наконец, что, подобно экспоненте, синус и косинус можно определить для произвольных комплексных чисел. В самом деле, из формул $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, верных для любого $x \in \mathbb{R}$, вытекают формулы

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2, \quad (13.11)$$

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i. \quad (13.12)$$

Правые части этих формул имеют смысл при любом $x \in \mathbb{C}$, и при любом $x \in \mathbb{C}$ их принимают за определение синуса и косинуса комплексных чисел. Из предложения 11.11 и абсолютной сходимости на любом круге ряда для экспоненты немедленно вытекает, что для синуса и косинуса комплексных чисел также верны разложения (13.8) и (13.9).

Задачи к первому семестру

1. Вводные задачи

Мы будем предполагать известными свойства действительных чисел и элементарных функций, входящие в школьную программу, а также определение и основные свойства пределов функции и последовательности. Кроме того, можно пользоваться следующим фактом: *всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел*.

1.1. Докажите, что при целых $n > 0$ и при $x > -1$ выполнено неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$.

1.2. а) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ при $q > 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $-1 < q < 1$.

б) Что можно сказать про $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n$ при различных $z \in \mathbb{C}$?

1.3. а) Докажите, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей, а $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ — монотонно убывающей.

б) Докажите, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (этот предел называется числом e).

1.4. Найдите следующие пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

1.5. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^a/b^n) = 0$ для всяких $a > 0$, $b > 1$.

1.6. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^a)/(\ln n) = +\infty$ для всякого $a > 0$.

1.7. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n/n! = 0$ при $a > 1$.

1.8. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/n^n$

Найдите пределы следующих последовательностей:

1.9. $(n+1)^{2006}/(n^{2006}+1)$;

1.10. $\sqrt[n]{n}$;

$$1.11. \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n + 4^n}{5^n + 6^n}}.$$

1.12. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.

1.13. Существует ли предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$?

1.14. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

а) Докажите, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, и найдите этот предел.

б) Найдите α , для которого предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x_n$ существует и не равен нулю, и вычислите этот предел.

2. Топологические пространства и непрерывность

1.15. Пусть X — топологическое пространство, и пусть $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Докажите, что их произведение $fg: X \rightarrow \mathbb{R}$ тоже непрерывно.

1.16. Что такое непрерывное отображение из множества $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$ в $\mathbb{R}$?

1.17. Пусть T — пространство треугольников на плоскости, определенное в лекции 1. Покажите, что следующие отображения непрерывны:

а) $S: T \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее в соответствие треугольнику его площадь.

б) $B: T \rightarrow \mathbb{R}^2$, ставящее в соответствие треугольнику его точку пересечения медиан.

в) $O: T \rightarrow \mathbb{R}^2$, ставящее в соответствие треугольнику его точку пересечения высот.

1.18. Пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ определяется как $\mathbb{R}^n$, к которому добавлена точка ∞ . Подмножество $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется открытым, если, во-первых, $U \cap \mathbb{R}^n$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и во-вторых, в случае, когда $U \ni \infty$, U содержит и множество вида $\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| > R\}$ для некоторого $R > 0$. Докажите, что $\overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфно единичной сфере в $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.19. Пусть X и Y — топологические пространства, $X \times Y$ — их декартово произведение (т. е. множество упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$).

а) Покажите, что семейство подмножеств $U \times V \subset X \times Y$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ открыты, образует базу некоторой топологии на $X \times Y$ и что проекции $X \times Y$ на оба сомножителя непрерывны относительно этой топологии.

Топология, о которой идет речь в пункте (а), называется *топологией произведения*.

б) Покажите, что топология произведения на $X \times Y$ является наименее тонкой топологией, относительно которой обе проекции непрерывны. (Если на одном множестве заданы две топологии, то говорят, что первая из них более тонкая, чем вторая, если всякое множество, открытое во второй топологии, открыто и в первой.)

в) Покажите, что $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$ (определение произведения n пространств придумайте самостоятельно).

1.20. Пусть X — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности на X , пусть X/R — множество классов эквивалентности и $\pi: X \rightarrow X/R$ — стандартное отображение (элемент множества переходит в содержащий его класс). Назовем подмножество $U \subset X/R$ открытым, если $\pi^{-1}(U)$ открыто в X .

а) Покажите, что такой выбор открытых множеств превращает X/R в топологическое пространство и что отображение π при этом непрерывно. (X/R с такой топологией называется факторпространством, а указанная топология на X/R — фактортопологией.)

б) Покажите, что фактортопология — наиболее тонкая топология на X/R , в которой отображение π непрерывно.

1.21. а) Пусть $M \subset (\mathbb{R}^2)^3$ — множество упорядоченных троек точек, не лежащих на одной прямой (и тем самым, в частности, различных). Назовем две тройки точек из M эквивалентными, если они отличаются только порядком точек. Покажите, что фактор пространства M по этому отношению эквивалентности гомеоморфен пространству T треугольников.

б) Введем на отрезке такое отношение эквивалентности: концы отрезка эквивалентны друг другу, а каждая из остальных точек эквивалентна только сама себе. Докажите, что фактор отрезка по этому отношению гомеоморфен окружности.

в) Введем на $\mathbb{R}^2$ отношение эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$. Покажите, что фактор $\mathbb{R}^2$ по этому отношению гомеоморфен множеству $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2: v \geq 0\}$.

г) Рассмотрим на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ следующие отношения эквивалентности:

$$R: (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda > 0: x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1,$$

$$S: (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda > 0: x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda^{-1} y_1.$$

Являются ли пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}/R$ и $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}/S$ хаусдорфовыми?

д) Пусть S^1 — окружность на плоскости; назовем две точки из $S^1 \times S^1$ эквивалентными, если они отличаются только перестановкой координат. Докажите, что фактор $S^1 \times S^1$ по этому отношению гомеоморфен листу Мёбиуса.

3. Действительные числа

1.22. Докажите, что для всякого (ограниченного) подмножества $X \subset \mathbb{R}$ его верхняя грань содержится в его замыкании.

1.23. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — два подмножества, обладающие тем свойством, что для всяких $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$. Покажите, что существует такое число $x \in \mathbb{R}$, что $a \leq x \leq b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если для всякой окрестности $U \ni a$ существует бесконечно много натуральных чисел n , обладающих тем свойством, что $x_n \in U$ (разумеется, это определение имеет смысл для любого топологического пространства).

1.24. а) Покажите, что у всякой ограниченной последовательности действительных чисел существуют наибольшая и наименьшая предельные точки (эти точки называются верхним и нижним пределами последовательности).

б) Покажите, что последовательность действительных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена и ее верхний предел равен нижнему.

1.25. Некоторое множество попарно непересекающихся отрезков прямой покрасили в белый цвет. Может ли так случиться, что на любом отрезке есть белая точка? (Точка отрезком не считается.)

1.26. Покажите, что для всякого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}$ существует последовательность, множество предельных точек которой совпадает с F .

1.27. Найдите замыкание подмножества в $\mathbb{R}$, состоящего из всевозможных чисел вида $m + n\sqrt{2}$, где m и n целые.

1.28. Существует ли семейство подмножеств в $\mathbb{N}$, имеющее мощность континуум и обладающее тем свойством, что из любых двух множеств этого семейства одно обязательно содержится в другом?

1.29. Рассмотрим функции из $(0, +\infty)$ в $(0, +\infty)$. Будем говорить, что функция f растет медленнее функции g (обозначение: $f \ll g$), если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 0$.

(а) Верен ли для (частичного) порядка $\ll$ «принцип вложенных отрезков»: если

$$f_1 \ll f_2 \ll \dots \ll f_n \ll \dots \ll g_n \ll \dots \ll g_2 \ll g_1,$$

то найдется функция h , для которой $f_k \ll h \ll g_k$ при всех k ?

(б) Верна ли для порядка $\ll$ «аксиома полноты»: если любая функция из множества A растет быстрее любой функции из множества B , то найдется функция, растущая медленнее всех элементов множества A и быстрее всех элементов множества B ?

4. Компактность; связность

1.30. Докажите, что полуинтервал $[0; 1)$ негомеоморфен отрезку $[0; 1]$.

1.31. а) Приведите пример взаимно однозначного непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, не являющегося гомеоморфизмом.

б) Приведите такой пример для случая, когда оба пространства линейно связны.

1.32. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — объединение графика функции $y = \sin(1/x)$ при $x > 0$ и отрезка, соединяющего точки $(0; -1)$ и $(0; 1)$. Докажите, что X связно, но не линейно связно.

1.33. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ является не более чем счетным объединением непересекающихся открытых интервалов.

1.34. Пусть $f(z) = a_n z^n + \dots + z_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что функция $z \mapsto |f(z)|$ принимает на $\mathbb{C}$ наименьшее значение. (Если $\deg f > 0$, то это наименьшее значение, как известно, равно нулю.)

1.35. Пусть f — многочлен от двух переменных с действительными коэффициентами. Верно ли, что функция $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ принимает на $\mathbb{R}^2$ наименьшее значение?

1.36. Докажите, что для любых двух выпуклых многоугольников на плоскости существует прямая, делящая каждый из них на две равновеликие части. (Можно пользоваться без доказательства фактами из школьного курса планиметрии.)

1.37. а) Докажите, что отрезок не гомеоморфен окружности.

б) Докажите, что отрезок не гомеоморфен квадрату на плоскости (множеству $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$).

(Кроме того, квадрат не гомеоморфен n -мерному кубу при $n > 2$ — для доказательства этого факта нужно знакомство с начальным курсом топологии, а также m -мерный и n -мерный кубы негомеоморфны при $m \neq n$ — для этого желателен второй концентр курса топологии.)

в) Докажите, что окружность не гомеоморфна квадрату.

1.38. Букетом n окружностей называется топологическое пространство, получаемое следующим образом: берется несвязное объединение n окружностей, на каждой из них выбирается по точке, и все эти точки склеиваются в одну (продумайте формальное определение самостоятельно). Докажите, что букет m окружностей негомеоморфен букету n окружностей при $m \neq n$.

1.39. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — бесконечное ограниченное множество. Докажите, что существует бесконечная последовательность различных точек $\{P_n\}$, где все $P_i \in X$, обладающая тем свойством, что ломаная $P_1 P_2 \dots P_n \dots$ выпукла (т. е. лежит по одну сторону от каждого своего звена).

1.40. Докажите, что если пространство со счетной базой секвенциально компактно, то оно компактно.

1.41*. Приведите пример секвенциально компактного пространства, не являющегося компактным.

5. Полнота

1.42. Пусть X — полное метрическое пространство; рассмотрим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\overline{B}_{r_1}(a_1) \supset \supset \overline{B}_{r_2}(a_2) \supset \dots \supset \overline{B}_{r_n}(a_n) \supset \dots$. Покажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ (радиусы стремятся к нулю), то пересечение всех этих шаров непусто и состоит ровно из одной точки.

1.43. Приведите пример последовательности вложенных замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве.

1.44. В каждом из следующих примеров выясните, является ли описанное в них метрическое пространство полным; если оно неполно, найдите явное описание для его пополнения.

а) Множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(a, b) = |\arctg a - \arctg b|$.

б) Интервал $(-\pi/2; \pi/2)$ с расстоянием $\rho(a, b) = |\tg a - \tg b|$.

в) l^∞ — множество ограниченных последовательностей; если $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$, то $\rho(a, b) = \sup |a_n - b_n|$.

г) Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1 = [a_1; b_1]$ и $S_2 = [a_2; b_2]$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$.

д) Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1, S_2 \in \Omega$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = l(S_1 \cup S_2) - l(S_1 \cap S_2)$, где через l обозначена длина отрезка или объединения отрезков (длина одноточечного или пустого множества считается равной нулю). Не забудьте доказать, что функция ρ является метрикой.

1.45. Покажите, что для подмножества $Z \subset X$, где X — топологическое пространство, следующие два условия эквивалентны:

(1) Замыкание Z не имеет внутренних точек.

(2) Для всякого непустого открытого $U \subset X$ существует такое непустое открытое $V \subset U$, что $V \cap Z = \emptyset$.

(Множества, удовлетворяющие этим условиям, называются *нигде не плотными*.)

1.46. Покажите, что множество чисел из отрезка $(0; 1)$, в десятичной записи которых не встречается последовательность 142857, является нигде не плотным. (Десятичные записи с бесконечным «хвостом» девяток запрещены.)

1.47. Покажите, что полное метрическое пространство нельзя представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств («теорема Бэра»).

1.48. Можно ли множество иррациональных чисел представить в виде объединения счетного семейства замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}$?

1.49. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на отрезке $[a; b]$, обладающая тем свойством, что для всякой точки $x \in [a; b]$ существует предел $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

а) Покажите, что функция f может не быть непрерывной на $[a; b]$.

б) Покажите, что функция f непрерывна хотя бы в одной точке отрезка $[a; b]$.

в) Приведите пример, когда функция f , полученная такой конструкцией, непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных.

г) А может ли так быть, чтобы f , напротив, была непрерывна во всех рациональных точках и разрывна во всех иррациональных?

6. p -адические числа и канторово множество

1.50. Покажите, что в кольце целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$ имеет место «арифметика пределов»:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

1.51. Пусть $u \in \mathbb{Z}_p$ не делится на p . Покажите, что существует такое $v \in \mathbb{Z}_p$, что $uv = 1$ (постарайтесь не пользоваться напрямую p -ичной записью).

1.52. Пусть $p > 2$ и $u \in \mathbb{Z}_p$ не делится на p . Покажите, что u является в $\mathbb{Z}_p$ полным квадратом (т. е. существует $x \in \mathbb{Z}_p$, для которого $x^2 = u$) тогда и только тогда, когда u сравнимо по модулю p с квадратом целого числа (т. е. существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $m^2 - u$ делится на p).

1.53. Выясните, какие элементы в $\mathbb{Z}_2$ являются полными квадратами.

1.54. Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{R}$ как группы по сложению. Какие существуют гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{R}$, являющиеся непрерывными отображениями?

1.55. Какие существуют непрерывные гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_p$, рассматриваемого как группа по сложению, в окружность (т. е. группу комплексных чисел, равных единице по модулю, с умножением в качестве операции)?

1.56. Пусть X — канторово множество.

а) Покажите, что X гомеоморфно $X \times X$.

б) Покажите, что X гомеоморфно произведению счетного числа пространств X .

1.57. Пусть X — выпуклое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что существует непрерывное и сюръективное отображение $f: [0; 1] \rightarrow X$ («кривая Пеано»).

1.58. Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если заменить слова «выпуклое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ » на «линейно связное и компактное метрическое пространство»?

1.59. Существует ли непрерывная функция f на отрезке $[0; 1]$, обладающая тем свойством, что для всякого $a \in [0; 1]$ множество решений уравнения $f(x) = a$ имеет мощность континуум?

1.60. Докажите, что множество иррациональных чисел (с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}$) гомеоморфно произведению счетного семейства счетных дискретных пространств.

1.61*. Докажите, что вполне несвязное и компактное метрическое пространство без изолированных точек гомеоморфно канторову множеству.

7. Производная

1.62. Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение, дифференцируемое с ненулевой производной на $(a; b)$, причем $f(a) \neq f(b)$. Обязательно ли найдется точка $c \in [a; b]$, для которой касательная к кривой в точке $f(c)$ параллельна отрезку, соединяющему $f(a)$ и $f(b)$? (Иными словами: верна ли в $\mathbb{R}^3$ теорема о среднем?)

1.63. Функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $p, q \in [a; b]$ отрезок, соединяющий точки $(p, f(p))$ и $(q, f(q))$, лежит над графиком функции $y = f(x)$, и *вогнутой*, если этот отрезок лежит под графиком. Пусть f принадлежит классу C^2 на $[a; b]$ и $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a; b)$; покажите, что f выпукла на $[a; b]$.

1.64. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — положительные числа.

а) Докажите, что $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$. (Указание. Проверьте, что $\ln$ — вогнутая функция.)

б) Докажите, что $\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Напомним, что если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$, то

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

1.65. Покажите, что если $x \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leq p < q$, то $\|x\|_p \geq \|x\|_q$.

1.66. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Покажите, что $|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. (Указание. Проверьте, что $t \mapsto t^p$ — выпуклая функция.)

1.67. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $p > 1$. Покажите, что $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

1.68. Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$. Покажите, что в точке a у функции существует «правая производная» (предел $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$).

1.69. а) Функция f задана по правилу

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Докажите, что f бесконечно дифференцируема на всем $\mathbb{R}$.

б) Докажите, что на $\mathbb{R}$ существует возрастающая бесконечно дифференцируемая C^∞ -функция f , тождественно равная нулю на $(-\infty; 0]$ и тождественно равная единице на $[1; +\infty)$.

1.70. Пусть f и g — функции класса C^{k+1} в окрестности нуля. Предположим, что для них имеют место асимптотики (при $x \rightarrow 0$)

$$f(x) = p(x) + o(x^k), \quad g(x) = q(x) + o(x^k),$$

где p и q — многочлены степени k без свободных членов. Покажите, что тогда для функции $y = f(g(x))$ имеет место асимптотика

$$f(g(x)) = r(x) + o(x^k),$$

где многочлен $r(x)$ получается из многочлена $p(q(x))$ отбрасыванием слагаемых степени $> k$.

1.71. Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

1.72. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}.$$

1.73. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$$

8. Ряды и интегралы

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности, то пишут $a_n = O(b_n)$, если существует такое $C > 0$, что $|a_n| \leq C \cdot |b_n|$ для всех n (или, что равносильно, для всех достаточно больших n). Ряд $\sum a_n$ называется *рядом с положительными членами*, если все a_j — неотрицательные действительные числа.

1.74. Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n = O(b_n)$. Покажите, что если $\sum b_n$ сходится, то и $\sum a_n$ сходится.

1.75. Пусть $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел. Покажите, что ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum 2^n a_{2^n}$.

1.76. Пусть $f: [1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Покажите, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx$.

1.77. Выясните, при каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$.

1.78. Покажите, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right)$$

(этот предел называется *постоянной Эйлера*).

1.79. Пусть $\sum a_n$ — сходящийся ряд из действительных чисел.

а) Обязательно ли сходится ряд $\sum a_n^2$?

б) Обязательно ли сходится ряд $\sum a_n^3$?

1.80. Пусть X — топологическое пространство, $\{a_n\}$ — монотонно убывающая и стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел, и пусть последовательность элементов $f_n \in C(X)$ обладает тем свойством, что $\|f_1 + \dots + f_n\| \leq M$ для некоторой константы M , не зависящей от n . Покажите, что ряд $\sum a_n f_n$ равномерно сходится.

1.81. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^s)$ сходится для некоторого $s = s_0 \in \mathbb{R}$, то он сходится равномерно по s на всяком отрезке, содержащемся в $(s_0; +\infty)$. (Если вы знакомы с соответствующими определениями, сделайте эту же задачу для случая, когда s и a_n могут быть комплексными числами.)

1.82. Положим, при $s > 1$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

(«дзета-функция Римана»).

а) Покажите, что

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^s}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}},$$

где через p_n обозначено n -е простое число.

б) Найдите предел $\lim_{s \rightarrow 1+0} (s-1)\zeta(s)$.

в) Сходится ли ряд $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots$?

1.83. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

1.84. а) Вычислите индукцией по n интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ для всех $n \in \mathbb{N}$. (Для самопроверки: при нечетных n ответ — рациональное число, при четных — рациональное кратное числа π .)

б) Выведите из пункта (а) и неравенств между различными степенями синуса следующую формулу:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))^2 \cdot (2n+1)}.$$

1.85. Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Покажите, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) \, dx = 0.$$

9. Асимптотики; равномерная сходимость

Пусть f и g — две функции. Говорят, что $f \sim g$ при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$, и что $f \simeq g$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$. (Аналогичные обозначения применяются для последовательностей, для $x \rightarrow \infty$ и т. п.)

«Найти асимптотику для f » означает «найти такую g , что $f \sim g$ (или хотя бы $f \simeq g$)». При этом подразумевается, что g должна быть «проще», чем f .

1.86. Найдите асимптотику с точностью до $\sim$: а) для $f(x) = 1 - \cos x$ при $x \rightarrow 0$; б) для $f(x) = \sin(\pi/6^x) - 1/2$ при $x \rightarrow 1$.

1.87. Найдите асимптотику с точностью до $\sim$ для функции $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\sin t} \, dt$ при $x \rightarrow 0$.

Найдите асимптотику (желательно — с точностью до $\sim$) для таких последовательностей:

1.88. $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ (при $\alpha > 0$).

1.89. $a_n = \sqrt[3]{n^5 - 3n + 2006}$.

1.90. a_n — n -й в порядке возрастания положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} x = x$.

1.91. a_n — корень уравнения $x^7 + nx - 1 = 0$.

1.92. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$.

1.93. $a_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx$.

Если уже доказано, что «простая» функция g является асимптотикой с точностью до $\sim$ для функции f , можно поискать «второй член асимптотического разложения» — асимптотику для $f - g$.

1.94. Найдите второй член асимптотического разложения для функций и последовательностей из следующих задач:

а) 1.86а; б) 1.87; в) 1.88; г) 1.90.

1.95. Обозначим через ℓ^1 множество последовательностей комплексных чисел $\alpha = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится. Положим $\|\alpha\| = \sum |a_n|$.

Покажите, что ℓ^1 — векторное пространство относительно почленного сложения и умножения на число и что оно является полным метрическим пространством относительно расстояния $\rho(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$.

1.96. Обозначим через ℓ^2 множество последовательностей комплексных чисел $\alpha = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum |a_n|^2$ сходится, и положим $\|\alpha\| = \sqrt{\sum |a_n|^2}$.

Покажите, что ℓ^2 — векторное пространство относительно почленного сложения и умножения на число и что оно является полным метрическим пространством относительно расстояния $\rho(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$.

1.97. а) Покажите, что для всякого интервала $[a; b] \subset [0; 1]$ и всякого положительного M множество

$$\left\{ f \in C([0; 1]) : \exists x \in (a; b) : \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M \text{ для всех } y \in (a; b) \right\}$$

нигде не плотно в $C([0; 1])$.

б) Покажите, что существуют функции, непрерывные на $[0; 1]$, но не имеющие производной ни в одной точке этого отрезка.

1.98. Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность C^1 -функций на интервале $[a; b]$ (это означает, что всякая функция f'_n продолжается до непрерывной функции на $[a; b]$). Предположим, что последовательности $\{f_n\}$ и $\{f'_n\}$ равномерно сходятся на $[a; b]$. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$.

1.99. Обозначим через $C^1([a; b])$ векторное пространство C^1 -функций на $[a; b]$ (см. определение в задаче 1.98). Для $f \in C^1([a; b])$ положим

$$\|f\| = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a; b]} |f'(x)|$$

(под производной в концах подразумевается односторонняя производная). Покажите, что $C^1([a; b])$ — полное метрическое пространство относительно расстояния $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

1.100. Докажите, что всякое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ является множеством нулей некоторой бесконечно дифференцируемой функции. (Указание. Вспомните, как описываются открытые подмножества в $\mathbb{R}$.)

Экзамен за первый семестр

1.101. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция. Предположим, что $f''(x) \geq 0$ для всех x и что f ограничена сверху (т. е. существует такое M , что $f(x) \leq M$ при всех x). Докажите, что f — константа.

1.102. Пусть $f(x) = e^{\sin(x^{10} + x^{11})}$. Найдите $f^{(32)}(0)$.

1.103. Пусть x_n — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = nx$ (где n — целое положительное число). Найдите асимптотику последовательности $\{x_n\}$ при $n \rightarrow \infty$.

1.104. Пусть

$$a_n = \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \dots + \sqrt[4]{n}.$$

Найдите асимптотику последовательности $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$.

1.105. Существует ли непрерывное и взаимно однозначное отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

1.106. Пусть для каждого целого $n \geq 1$ дано конечное множество X_n , а для каждого целого $n \geq 2$ дано отображение $f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$. Докажите, что существует последовательность $\{x_n\}$ (n пробегает все целые положительные числа), для которой $x_n \in X_n$ и $f_n(x_n) = x_{n-1}$ при всех $n > 1$.

1.107. Пусть

$$x_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots \sqrt{1 + n}}}}}$$

Докажите, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, и найдите этот предел.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

14. Мера Лебега на $\mathbb{R}$

Мы начнем семестр с обобщения известных из средней школы понятий площади и объема. Первое, что приходит в голову — построить отображение, которое каждому ограниченному подмножеству в $\mathbb{R}^n$ ставит в соответствие некоторое неотрицательное число (его « n -мерный объем»), причем объемы ограниченных множеств конечны, объемы конгруэнтных (совмещающихся движением) множеств совпадают, а объем объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств равен сумме их объемов. К сожалению, так не выходит (например, при $n \geq 3$ такого отображения не существует); разумная теория получается, если не требовать, чтобы объем был определен на *всех* (хотя бы и ограниченных) подмножествах, но зато потребовать аддитивности относительно счетных объединений. Перейдем к точным определениям.

Определение 14.1. Пусть X — произвольное множество. *Булевой подалгеброй* в 2^X называется семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$, обладающее следующими свойствами:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{B}$, $X \in \mathcal{B}$;
- (2) если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ также лежат в $\mathcal{B}$.

Булева подалгебра $\mathcal{E} \subset 2^X$ называется *σ -алгеброй*, если она обладает следующим свойством:

- (3) если все множества из счетного семейства $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ лежат в $\mathcal{E}$, то их пересечение $\bigcap_n A_n$ и объединение $\bigcup_n A_n$ также лежат в $\mathcal{E}$.

Ввиду законов де Моргана в определении σ -алгебры достаточно потребовать замкнутости только относительно счетных объединений (или только счетных пересечений).

Вот важный пример σ -алгебры.

Определение 14.2. Пусть X — топологическое пространство. Тогда *σ -алгеброй борелевских множеств* называется наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые множества (или, что равносильно, все замкнутые множества). Подмножество в X называется *борелевским*, если оно является элементом этой σ -алгебры.

Ниже мы будем иметь дело с множеством $[0; \infty]$, состоящим из неотрицательных действительных чисел и символа ∞ . Мы будем считать,

что $\infty + \infty = \infty$, а также что $a < \infty$ и $a + \infty = \infty$ для всякого неотрицательного $a \in \mathbb{R}$. Кроме того, положим $a \cdot \infty = \infty$, если $a > 0$, и $0 \cdot \infty = 0$.

Всякое подмножество в $[0; \infty]$ обладает, очевидно, верхней и нижней гранью. Если $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — счетное семейство элементов $[0; +\infty]$, то определена сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$: если все a_i конечны и ряд $\sum a_i$ сходится, то это сумма данного ряда, в противном случае $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$. Сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ не меняется при перестановке элементов a_i .

Определение 14.3. *Пространство с мерой* — это тройка $(X, \mathcal{E}, \mu)$, где X — множество, $\mathcal{E} \subset 2^X$ — σ -алгебра и $\mu: \mathcal{E} \rightarrow [0; \infty]$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям.

(1) Если $\{A_i\}_{i \in N}$ — счетное семейство попарно непересекающихся элементов из $\mathcal{E}$, то $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

(2) Для хотя бы одного $A \in \mathcal{E}$ имеем $\mu(A) < \infty$.

Элементы σ -алгебры $\mathcal{E}$ называются *измеримыми множествами*, а функция μ — мерой; число $\mu(A)$ называется *мерой* множества $A \in \mathcal{E}$.

Свойство (1) называется *счетной аддитивностью*.

Отметим сразу же несколько тривиальных следствий этого определения. Во-первых, если $A \neq \emptyset$ и $\mu(A) < \infty$, то, положив в (1) $A_1 = A$ при $j > 1$, получаем, что $\mu(\emptyset) = 0$; если в условиях (1) все множества A_i , кроме первых n , положить равными $\emptyset$, то из доказанного будет следовать «конечная аддитивность»: $\mu(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ (здесь и ниже символом $\sqcup$ обозначается объединение попарно непересекающихся множеств). Далее, из конечной аддитивности вытекает, что $\mu(A) \leq \mu(B)$ при $A \subset B$, а также что $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (поскольку $\mu(A \cup B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A))$). Все эти свойства будут далее использоваться без пояснений.

Следующее простое свойство мер заслуживает того, чтоб быть отмеченным отдельно.

Предложение 14.4. *Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ — измеримые множества, то $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$.*

Доказательство. Это немедленно следует из счетной (и конечной) аддитивности и равенства

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \dots \sqcup (A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})) \sqcup \dots \quad \square$$

Следствие 14.5. Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ — измеримые множества и $\mu(A_1) < \infty$, то $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$.

Доказательство. Поскольку $A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \setminus A_3 \subset \dots$ и объединение этой возрастающей последовательности множеств совпадает с $A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, все следует из предложения 14.4 и конечной аддитивности. $\square$

Приведем примеры пространств с мерой. Пусть X — произвольное множество. Объявим все подмножества в X измеримыми и положим, для $A \subset X$, его меру $\mu(A)$ равной количеству элементов в A (если A бесконечно, то $\mu(A) = \infty$). Очевидно, при этом получается пространство с мерой. Другой пример: если $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространство с мерой и $E \in \mathcal{E}$, то ограничение μ на семейство измеримых множеств, содержащихся в E , задает меру на E .

Чтобы привести более содержательный пример, надо приложить определенные усилия. Именно, сейчас мы построим меру на $\mathbb{R}$, называемую мерой Лебега. Собственно говоря, какой-то элемент из $[0; +\infty]$ (так называемую «внешнюю меру») мы сопоставим *всякому* подмножеству в $\mathbb{R}$, но при этом счетная аддитивность будет гарантирована только на некоторой σ -алгебре (содержащей все борелевские множества).

Заметим, что всякое открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ единственным образом представляется в виде объединения не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов (они называются *составляющими интервалами* множества U). В самом деле, если ввести на U отношение « $x \sim y$, если существует открытый интервал $(a; b) \subset U$, содержащий x и y », то тривиально проверяется, что $\sim$ — отношение эквивалентности, а также что классы эквивалентности являются связными открытыми подмножествами в $\mathbb{R}$, то есть интервалами. Теперь определим для открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его меру $\mu(U)$ как сумму длин составляющих интервалов (длину бесконечного интервала полагаем равной бесконечности).

Определение 14.6. Внешней мерой подмножества $E \subset \mathbb{R}$ называется число

$$\mu(E) = \inf_{\substack{U \supset E \\ U \text{ открыто}}} \mu(U).$$

Из этого определения очевидно, что внешняя мера любого интервала (вне зависимости от того, какие из концов в него включены) равна его длине. Ясно также, что $\mu(E) \leq \mu(F)$, как только $E \subset F$.

Лемма 14.7. (1) Если $U_1, U_2, \dots$ — открытые подмножества в $\mathbb{R}$ и $U = \bigcup U_i$, то $\mu(U) \leq \sum \mu(U_i)$.

(2) Если при этом U_i попарно не пересекаются, то $\mu(U) = \sum \mu(U_i)$.

Доказательство. Утверждение (2) очевидно; докажем (1). Пусть $U = \bigsqcup_j V_j$ — разложение U на составляющие интервалы, и пусть $U_{ij} = U_i \cap V_j$. Поскольку U_{ij} не пересекается с $U_{i'j'}$ при $j \neq j'$, из утверждения (2) следует, что достаточно рассмотреть случай, когда U — интервал; далее, разбивая U_{ij} на составляющие интервалы, сводим задачу к случаю, когда и U , и все U_i являются интервалами. Заметим, что всякий отрезок $T \subset U$ покрывается конечным числом интервалов $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$, так что имеем

$$\mu(T) \leq \mu(U_{i_1}) + \dots + \mu(U_{i_k}) \leq \sum \mu(U_i).$$

Остается заметить, что верхняя грань $\mu(T)$ по всем таким T равна $\mu(U)$. $\square$

Следствие 14.8. Для конечного или счетного семейства произвольных подмножеств $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}$ имеем $\mu(\bigcup E_i) \leq \sum \mu(E_i)$.

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдем такие открытые множества $U_i \supset E_i$, что $\mu(U_i) \leq \mu(E_i) + \varepsilon/2^i$. Теперь, ввиду предыдущей леммы, имеем

$$\mu\left(\bigcup E_i\right) \leq \mu\left(\bigcup U_i\right) \leq \sum \mu(U_i) \leq \sum \mu(E_i) + \sum \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \sum \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Остается устремить ε к нулю. $\square$

Следствие 14.9. Если $A \supset B$, то $\mu(A) - \mu(A \setminus B) \leq \mu(B)$.

Доказательство. Положите $E_1 = A \setminus B$, $E_2 = B$. $\square$

Вот еще одно полезное свойство внешней меры.

Лемма 14.10. Если $K_1, \dots, K_n \subset \mathbb{R}$ — попарно непересекающиеся компактные подмножества, то $\mu(K_1 + \dots + K_n) = \mu(K_1) + \dots + \mu(K_n)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Покажем, что существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$, что $U_i \supset K_i$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. В самом деле, для $x \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ положим $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$ («расстояние от точки до подмножества»). Теперь легко видеть, что если положить $U_1 = \{x: d(x, K_1) < d(x, K_2)\}$ и

$U_2 = \{x: d(x, K_2) < d(x, K_1)\}$, то множества U_1 и U_2 обладают требуемыми свойствами.¹

Из доказанного вытекает, что всякое открытое множество $V \supset \supset K_1 \cup K_2$ содержит открытое подмножество вида $V_1 \sqcup V_2$, где V_1 и V_2 открыты и $V_i \supset K_i$ (достаточно положить $V_i = V \cap U_i$). Теперь искомое равенство очевидно. $\square$

Определение 14.11. Ограниченное подмножество $E \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Лебегу* (далее мы будем говорить просто «измеримым»), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $K \subset E$, что $\mu(E) \leq \mu(K) + \varepsilon$.

(Измеримость для неограниченных множеств мы определим чуть позже.)

Заметим, что всякое компактное подмножество в $\mathbb{R}$ автоматически является измеримым. Очевидно, что измерим и всякий ограниченный интервал. Так как всякое открытое множество является объединением не более чем счетного семейства непересекающихся интервалов, измеримость ограниченных открытых множеств будет являться частным случаем следующего важного факта.

Лемма 14.12. Пусть $E_1, E_2, \dots$ — конечное или счетное семейство попарно непересекающихся ограниченных измеримых множеств; положим $E = \bigsqcup_i E_i$. Тогда:

- (1) $\mu(E) = \sum_i \mu(E_i)$;
- (2) если E ограничено, то оно измеримо.

Доказательство. Ввиду следствия 14.8 для доказательства (1) достаточно установить, что $\sum \mu(E_i) \leq \mu(E)$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и выберем компактные подмножества $K_i \subset E_i$, для которых $\mu(E_i) \leq \mu(K_i) + \varepsilon/2^i$. Поскольку E_i попарно не пересекаются, таковы же и K_i . Поэтому из леммы 14.10 вытекает, что

$$\begin{aligned} \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n) &\leq \mu(K_1) + \dots + \mu(K_n) + \varepsilon = \\ &= \mu(K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n) + \varepsilon \leq \mu(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, а затем ε к нулю, получаем (1).

Предположим теперь, что E ограничено, и пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\sum \mu(E_i) = \mu(E) < \infty$, из (1) вытекает существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $\mu(E) \leq \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n) + \varepsilon/2$. Так как все E_i измеримы, для всякого

¹То же рассуждение проходит, если заменить $\mathbb{R}$ на произвольное метрическое пространство, а K_1 и K_2 — на два его непересекающихся замкнутых подмножества. По-ученому говоря, это означает, что метрические пространства «нормальны».

$i \leq n$ найдется компактное $K_i \subset E_i$, для которого $\mu(E_i) \leq \mu(K_i) + \varepsilon/2n$. Принимая во внимание (1), имеем

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^n \mu(K_i) + \varepsilon = \mu(K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n) + \varepsilon,$$

чем измеримость множества E и доказана. $\square$

Лемма 14.13. *Если E_1 и E_2 — ограниченные измеримые множества, то $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cap E_2$ и $E_1 \cup E_2$ — также ограниченные измеримые множества.*

Доказательство. Из равенств $E_1 \cap E_2 = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_2)$ и $E_1 \cup E_2 = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1)$ в сочетании с леммой 14.12 вытекает, что достаточно доказать утверждение про разность. Заметим, что для $i = 1, 2$ и данного $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество K_i и открытое множество U_i , для которых $K_i \subset E_i \subset U_i$, причем $\mu(K_i) + \varepsilon/2 \geq \mu(E_i) \geq \mu(U_i) - \varepsilon/2$. Поскольку множества U_i и K_i , будучи соответственно открытым и компактным, являются ограниченными измеримыми, из леммы 14.12 вытекает, что $\mu(U_i \setminus K_i) = \mu(U_i) - \mu(K_i)$; следовательно, $\mu(U_i \setminus K_i) \leq \mu(U_i) - \mu(K_i) \leq \varepsilon$ при $i = 1, 2$.

Заметим, что для измеримости $E_1 \setminus E_2$ достаточно построить (для всякого $\varepsilon > 0$) открытое множество U и компактное множество K , для которых $U \supset E_1 \setminus E_2 \supset K$ и $\mu(U \setminus K) \leq 2\varepsilon$: в самом деле, тогда

$$\mu(E_1 \setminus E_2) - \mu(K) \leq \mu((E_1 \setminus E_2) \setminus K) \leq \mu(U \setminus K) \leq 2\varepsilon.$$

Положим теперь $U = U_1 \setminus K_2$ и $K = K_1 \setminus U_2$; тогда

$$U \setminus K \subset (U_1 \setminus K_1) \cup (U_2 \setminus K_2),$$

откуда по следствию 14.8 имеем $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, и все доказано. $\square$

Вот теперь мы можем определить меру Лебега на $\mathbb{R}$.

Определение 14.14. Подмножество $E \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если его пересечение со всяким конечным интервалом является измеримым ограниченным множеством в смысле определения 14.11.

Если $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Лебегу множество, то его *мерой Лебега* называется внешняя мера $\mu(E)$.

Из леммы 14.13 вытекает, что всякое ограниченное измеримое множество является измеримым по Лебегу.

Теорема 14.15. *Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, где через $\mathcal{L}$ обозначено множество измеримых по Лебегу подмножеств в $\mathbb{R}$, является пространством с мерой.*

Доказательство. Почти все уже сделано, остается только собрать результаты воедино.

Нам надо проверить, что $\mathcal{L}$ является σ -алгеброй и что μ счетно аддитивна на $\mathcal{L}$. Из определения и леммы 14.13 вытекает, что $\mathcal{L}$ является булевой алгеброй; из того же определения и леммы 14.12 вытекает, что если $\{E_i\}$ — не более чем счетное семейство попарно непересекающихся измеримых множеств, то измеримо и их объединение $\bigcup E_i$. Если же семейство $\{E_i\}$ измеримых множеств произвольно, заметим, что

$$\bigcup_i E_i = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)) \sqcup \dots,$$

причем все множества в правой части измеримы, так как измеримые множества образуют булеву алгебру.

Чтобы установить, наконец, счетную аддитивность, представим теперь $\mathbb{R}$ каким-либо способом в виде счетного объединения попарно непересекающихся ограниченных измеримых подмножеств (например, интервалов вида $[n, n+1)$) и запишем это разбиение в виде $\mathbb{R} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} S_i$.

Из леммы 14.12 следует, что $\mu(E) = \sum_j \mu(E \cap S_j)$ для всякого измеримого множества E . Если теперь $\{E_i\}$ — не более чем счетное семейство попарно непересекающихся измеримых множеств и $E = \bigcup_i E_i$, то имеем

$$\mu(E) = \sum_j \mu(E \cap S_j) = \sum_j \sum_i \mu(E_i \cap S_j) = \sum_i \sum_j \mu(E_i \cap S_j) = \sum_i \mu(E_i)$$

(перестановка суммирований законна, так как мы имеем дело с рядами с положительными членами). Все доказано. $\square$

Следствие 14.16. *Всякое борелевское подмножество в $\mathbb{R}$ измеримо по Лебегу.*

В самом деле, всякое открытое множество принадлежит σ -алгебре измеримых множеств.

15. Интеграл Лебега

Как меру Лебега мы определили не для всех множеств, так и интеграл Лебега будет определен не для всех функций.

Определение 15.1. Пусть X — пространство с мерой и Y — топологическое пространство. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *измеримым*, если для всякого открытого подмножества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U)$

измерим (равносильное условие: измерим прообраз всякого замкнутого множества).

Если $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то измеримое отображение из X в Y называется *измеримой функцией*.

Ясно, что если отображение $f: X \rightarrow Y$ измеримо, а $g: Y \rightarrow Y'$ — непрерывное отображение в другое топологическое пространство, то композиция $g \circ f$ измерима; кроме того, из того, что пересечение измеримых множеств измеримо, вытекает следующее: если $f_1: X \rightarrow Y_1$ и $f_2: X \rightarrow Y_2$ измеримы, то отображение $(f_1, f_2): X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ также измеримо. Сопоставляя эти два факта, получаем следующее

Предложение 15.2. *Пусть X — пространство с мерой. Если f и g — измеримые функции из X в $\mathbb{C}$, то функции $f + g$, fg , $|f|$ и λf для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ также измеримы.*

Если $f: X \rightarrow Y$ — измеримое отображение, то ясно, что измеримы прообразы не только открытых множеств, но и любых борелевских (в частности, замкнутых множеств или полуоткрытых интервалов в $\mathbb{R}$).

Отметим еще, что характеристическая функция подмножества $E \subset X$ (равная единице на E и нулю вне E) измерима, очевидно, тогда и только тогда, когда измеримо множество E .

Мы будем также рассматривать функции на пространствах с мерой, принимающие значения в $[0; \infty]$. Поскольку $[0; \infty]$ также можно рассматривать как топологическое пространство (базис открытых множеств — обычные открытые множества в $[0; \infty)$ плюс интервалы вида $(a; \infty]$), постольку можно говорить об измеримых функциях со значениями в $[0; \infty]$. Легко видеть, что отображение $f: X \rightarrow [0; \infty]$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримы множество $f^{-1}(\infty)$ и ограничение f на $X \setminus f^{-1}(\infty)$.

Предложение 15.3. *Пусть X — пространство с мерой и $\{f_n\}$ — последовательность измеримых отображений из X в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $[0; +\infty]$. Предположим, что для всякого $x \in X$ существует предел $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (предел поточечный, никакой равномерности не предполагается). Тогда отображение f также измеримо.*

Доказательство. Разберем случай отображений в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Положим $B_\varepsilon(a) = \{y: |y - a| < \varepsilon\}$, $\bar{B}_\varepsilon(a) = \{y: |y - a| \leq \varepsilon\}$. Поскольку всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ является не более чем счетным объединением множеств вида $B_\varepsilon(a)$, достаточно проверить измеримость

$f^{-1}(B_\varepsilon(a))$. Эта измеримость очевидна из равенства

$$f^{-1}(B_\varepsilon(a)) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} f_m^{-1}(\bar{B}_{\varepsilon-1/n}(a)).$$

Случай отображения в $[0; \infty]$ разберите самостоятельно (все сводится к доказательству измеримости прообра бесконечности). $\square$

Теперь перейдем к определению интеграла Лебега. Начнем с того, что определим интеграл от неотрицательных вещественных функций, а точнее — отображений в $[0; \infty]$ (мы будем называть такие отображения попросту «положительными функциями»).

Ниже мы будем постоянно пользоваться следующим обозначением: если $f, g: X \rightarrow [0; \infty]$, то запись $f \leq g$ будет означать, что $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in X$.

Зафиксируем некоторое пространство с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$.

Определение 15.4. Отображение $\varphi: X \rightarrow [0; \infty]$ называется *простой функцией*, если X можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся измеримых множеств $X = E_1 \sqcup \dots \sqcup E_n$ таким образом, что φ будет постоянна на каждом из E_i .

Интегралом Лебега от простой функции $\varphi: X \rightarrow [0; \infty]$ называется сумма $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \mu(E_i) \in [0; \infty]$, где $x_i \in E_i$.

Обозначение: $\int_X \varphi d\mu$.

Иногда вместо $\int_X f d\mu$ мы будем для краткости писать $\int f$, а иногда, напротив, для ясности придется писать что-нибудь вроде $\int_X f(x) d\mu(x)$.

Отметим, что всякая простая функция измерима (как линейная комбинация характеристических функций измеримых множеств). Обратите также внимание, что все значения простой функции конечны.

Из конечной аддитивности меры μ ясно, что $\int \varphi d\mu$ не зависит от выбора разбиения пространства X , относительно которого функция φ будет простой. Ясно также, что если φ и ψ — простые функции, то проста и функция $\varphi + \psi$, причем $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$ (если φ проста относительно разбиения $X = \bigsqcup E_i$, а ψ — относительно разбиения $X = \bigsqcup F_j$, то функция $\varphi + \psi$ проста относительно разбиения $X = \bigsqcup (E_i \cap F_j)$). Наконец, совсем очевидно, что если φ — простая функция и $c \geq 0$, то $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$.

Определение 15.5. *Интегралом Лебега* от измеримой положительной функции $f: X \rightarrow [0; \infty]$ называется верхняя грань

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \text{ простая}}} \int \varphi d\mu \in [0; \infty].$$

Если $E \subset X$ — измеримое подмножество, то мера μ на X индуцирует, как мы отмечали ранее, меру на E ; если f — измеримая положительная функция, то интеграл от ограничения $f|_E$ по этой мере на E мы будем обозначать $\int_E f d\mu$; непосредственно из определения видно, что $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$, где χ_E — характеристическая функция множества E .

В следующем очевидном предложении резюмированы простейшие свойства интеграла от неотрицательных функций.

Предложение 15.6. *Пусть $f, g: X \rightarrow [0; +\infty]$ измеримы.*

- (1) *Если $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.*
- (2) *Если $\lambda \geq 0$ — константа, то $\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \cdot \int_X f d\mu$.*
- (3) *Если $Y \subset X$ измеримо, то $\int_Y f d\mu \leq \int_X f d\mu$.*

Чуть сложнее доказывается следующий важный факт.

Предложение 15.7. *Пусть f — положительная измеримая функция на пространстве с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$. Тогда отображение $E \mapsto \int_E f d\mu$ является мерой на X .*

Доказательство. Нам надо показать, что $\int_E f d\mu = \sum \int_{E_i} f d\mu$, как только $E = \bigsqcup_i E_i$, где все E_i измеримы. В самом деле, пусть $\varphi \leq f$ — простая функция. Представим ее в виде $\varphi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{F_j}$, где $\lambda_j > 0$ и F_j — попарно непересекающиеся измеримые множества. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E \varphi d\mu &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(F_i) = \sum_{i=1}^n \sum_j \lambda_i \mu(F_i \cap E_j) = \sum_j \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(F_i \cap E_j) = \\ &= \sum_j \int_{E_j} \varphi d\mu \leq \sum_j \int_{E_j} f d\mu. \end{aligned}$$

Беря верхнюю грань по всем простым $\varphi \leq f$, получаем, что $\int_E f d\mu \leq \sum_j \int_{E_j} f d\mu$.

Противоположное неравенство доказывается совсем просто: для всякого натурального n имеем

$$\sum_{i=1}^n \int_{E_n} f \, d\mu = \int_X \chi_{E_1 \cup \dots \cup E_n} f \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu;$$

остается перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Замечание 15.8. Меры, получающиеся конструкцией из предложения 15.7, называются *абсолютно непрерывными* относительно меры μ .

Соглашение 15.9. Будем говорить, что некоторое свойство, зависящее от точки $x \in X$, выполнено *почти всюду* (или *почти всюду по мере μ* , если возможна двусмысленность), если оно выполнено для всех x , кроме тех, что лежат в некотором множестве меры нуль.

Из предложения 15.7 (точнее, из его тривиального частного случая, касающегося объединения конечного числа множеств) вытекает, что интегралы Лебега от двух функций совпадающих почти всюду, должны быть равны.

Вот основное свойство интеграла Лебега от положительных функций.

Теорема 15.10 (теорема Беппо Леви). Пусть $\{f_n\}$ — последовательность отображений из X в $[0; +\infty]$, причем $f_n \leq f_{n+1}$ для всех n , и пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ для почти всех $x \in X$ (сходимость поточечная). Тогда $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Доказательство. Если $X_0 \subset X$ — подмножество меры нуль, на котором сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ места не имеет, то, поскольку интегралы от любой функции по X и $X \setminus X_0$ совпадают, можно заменить X на $X \setminus X_0$ и считать, что $f_n \rightarrow f$ всюду. Так мы и сделаем.

В силу предложения 15.3 функция f измерима, так что пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся измеримых множеств, на одном из которых f всюду конечна, а на другом — всюду бесконечна. Поэтому, ввиду аддитивности интеграла как функции множества (предложение 15.7), достаточно доказать теорему отдельно для каждого из двух случаев: когда f всюду конечна и когда она всюду бесконечна.

Пусть сначала $f < \infty$ всюду. Имеем $f_n \leq f$ для всех n , откуда $\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$; устремляя n к бесконечности, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$.

Чтобы доказать противоположное неравенство, зададимся действительным числом $c \in (0; 1)$ и положим $X_n = \{x \in X: f_n(x) \geq cf(x)\}$. Ясно, что X_n — измеримое множество и что $\int_X f_n d\mu \geq \int_{X_n} f_n d\mu \geq c \cdot \int_{X_n} f d\mu$.

Из условия ясно, что $X_i \subset X_{i+1}$ для всех i и что $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$, так что из предложения 15.7 и свойства непрерывности мер (предложение 14.4) вытекает, что если перейти в полученном неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, то окажется, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq c \cdot \int_X f d\mu$. Устремляя c к единице, получаем искомое противоположное неравенство.

Если f всюду бесконечна, то достаточно, очевидно, рассматривать случай, когда $\mu(X) > 0$ и тем самым $\int_X f d\mu = \infty$ (в противном случае все интегралы по X равны нулю и доказывать нечего). Зададимся произвольным $C > 0$ и положим $X_n = f_n^{-1}(C; +\infty)$. Тогда X — по-прежнему возрастающее объединение множеств X_n , причем $\int_X f_n d\mu \geq \int_{X_n} f_n d\mu \geq C \cdot \mu(X_n)$. Поскольку $\mu(X_n) \rightarrow \mu(X) > 0$ (опять по предложению 14.4), имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq C \cdot \mu(X)$, где C произвольное, так что предел равен бесконечности, что и требовалось. $\square$

Вот первое приложение теоремы Беппо Леви.

Предложение 15.11. *Если f и g — положительные измеримые функции, то $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.*

Доказательство. Начнем с простой леммы.

Лемма 15.12. *Для всякой положительной измеримой функции φ существует монотонная последовательность простых функций $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \dots$, поточечно сходящаяся к f .*

Доказательство леммы. Построим по индукции для каждого $n \in \mathbb{N}$ разбиение $0 = a_{n0} < a_{n1} < \dots < a_{n, k_n-1} < a_{n, k_n} = n$ отрезка $[0; n]$, для которого длины всех отрезков разбиения не превосходят $1/2^{n-1}$; этому разбиению сопоставим простую функцию f_n , для которой $f_n(x) = a_{nj}$ при $x \in f^{-1}([a_{nj}, a_{n, j+1}))$ и $f(x) = n$ при $x \in f^{-1}([n; \infty])$; ясно, что $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 1/2^{n-1}$ при $x \in f^{-1}([0; n])$. Именно, положим $a_{10} = 0$, $a_{11} = 1$; если разбиение с номером n построено, то разбиение номер $n+1$ строим так: каждый из отрезков, на которые разбит $[0; n]$, делим пополам, плюс отрезок $[n; n+1]$ делим на 2^n равных частей. Очевидно, что для всех x последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонно возрастает и сходится к $f(x)$. $\square$

Пусть теперь $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — монотонные последовательности простых функций, поточечно сходящиеся к f и g соответственно. Тогда $\{\varphi_n + \psi_n\}$ — монотонная последовательность простых функций, поточечно сходящаяся к $f + g$. По теореме Беппо Леви имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n = \int f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n = \int g$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int \varphi_n + \int \psi_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi_n + \psi_n) = \int (f + g)$. $\square$

В качестве следствия докажем аналог теоремы Беппо Леви для убывающих последовательностей.

Предложение 15.13. Пусть $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ — убывающая последовательность положительных измеримых функций, поточечно сходящаяся почти всюду к функции f . Если $\int_X f_1 d\mu < \infty$, то $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Доказательство. Поскольку f_1 , все f_i и $f_1 - f_i$ — положительные функции и при этом $\int_X f_1 d\mu < \infty$, из предложения 15.11 вытекает, что $\int_X (f_1 - f_i) = \int_X f_1 - \int_X f_i$. Остается применить теорему Беппо Леви к возрастающей последовательности $\{f_1 - f_i\}$. $\square$

Теперь определим интеграл Лебега от не обязательно положительных измеримых функций.

Определение 15.14. Измеримая функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ называется *суммируемой*, если $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Из предложения 15.6 следует, что комплексная функция суммируема тогда и только тогда, когда суммируемы ее действительная и мнимая часть.

Обозначение 15.15. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция. Тогда положим $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Ясно, что f_+ и f_- неотрицательны, измеримы, если измерима f , что $f = f_+ - f_-$ и что интегралы от f_+ и f_- конечны тогда и только тогда, когда f суммируема. Из этих рассуждений вытекает, что следующее определение применимо к любой суммируемой функции.

Определение 15.16. Пусть f — суммируемая вещественная функция на X , представленная в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1 и f_2 — неотрицательные измеримые функции с конечным интегралом. Тогда *интегралом Лебега от f по X* называется число

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu.$$

Если f — суммируемая функция на X со значениями в $\mathbb{C}$, то ее *интегралом Лебега по X* называется число

$$\int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re}(f) d\mu + i \cdot \int_X \operatorname{Im}(f) d\mu.$$

Приведенное здесь определение интеграла Лебега от вещественных функций нуждается в проверке корректности. Сделаем это: если $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ — два представления f в виде разности неотрицательных суммируемых функций, то $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, откуда, ввиду предложения 15.11, имеем $\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$, или $\int f_1 - \int g_1 = \int f_2 - \int g_2$, что и требовалось.

Предложение 15.17. Пусть f и g — суммируемые функции на X , и пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тогда:

- (0) $\lambda f + \mu g$ суммируема;
- (1) $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$;
- (2) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$;
- (3) $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$;
- (4) если $\mu(X) < \infty$, то $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \mu(X) \cdot \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Доказательство. Пусть сначала f и g — функции со значениями в $\mathbb{R}$, а λ и μ вещественны. Тогда (0) и (2) немедленно следуют из предложения 15.11, (1) очевидно ввиду предложения 15.6, (3) вытекает из 15.11 и очевидного неравенства

$$\left| \int f_+ - \int f_- \right| \leq \int f_+ + \int f_-,$$

а (4) немедленно вытекает из (3).

Комплексный случай получается из вещественного с помощью выделения действительной и мнимой частей. $\square$

Для (кусочно-) непрерывных функций, и вообще для «хороших» функций в смысле лекции 10, интеграл Лебега совпадает с интегралом, определенным в указанной лекции:

Предложение 15.18. Если $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ — хорошая функция в смысле определения 10.5, то она суммируема на $[a; b]$ относительно меры Лебега μ и $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a; b]} f d\mu$.

Доказательство. Из пункта (4) предложения 15.17 вытекает, что если последовательность суммируемых функций $\{f_n\}$ на пространстве

с мерой (X, μ) , где $\mu(X) < \infty$, равномерно сходится к функции f , то $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ (вскоре мы докажем и более сильные результаты о предельном переходе под знаком интеграла). Поэтому достаточно проверить предложение для случая, когда функция f кусочно-постоянна, а тогда оно очевидно. $\square$

До сих пор единственной имевшейся в нашем распоряжении теоремой о предельном переходе под знаком интеграла Лебега была теорема Беппо Леви; сейчас мы получим более общий результат.

Для начала нелишне заметить, что если не накладывать совсем никаких условий на последовательность подынтегральных функций, то интеграл от предела может отличаться от предела интегралов (вспомним общеизвестные примеры с неравномерно сходящимися последовательностями непрерывных функций). Тем не менее, полного произвола в этой области все же нет.

Предложение 15.19 (лемма Фату). Пусть $\{f_n\}$ — последовательность положительных измеримых функций на пространстве (X, μ) , сходящаяся почти всюду к функции f . Если при этом существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$, то

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu;$$

в общем случае имеем $\int_X f d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.

Доказательство. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ положим $\varphi_n(x) = \inf_{m \geq n} f_m(x)$. Легко видеть, что φ_n — измеримые функции, $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ и $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ для тех же x , для которых $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Следовательно, по теореме Беппо Леви имеем $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n$. Поскольку $\varphi_n(x) \leq f(x)$ для всех x , имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$, если предел в правой части существует, так что для этого случая предложение доказано. Если же $\lim \int f_n$ не существует, то по крайней мере из неравенств $\int \varphi_n \leq \int f_n$ вытекает, что $\int f = \lim \int \varphi_n$ не превосходит любой предельной точки последовательности $\left\{ \int f_n \right\}$ и, в частности, ее нижнего предела. $\square$

Из леммы Фату выводится следующий удобный на практике результат о предельном переходе под знаком интеграла, называемый «теоремой Лебега об ограниченной сходимости».

Теорема 15.20. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность суммируемых функций на пространстве $(X; \mu)$, сходящаяся почти всюду к функции f . Если существует такая неотрицательная суммируемая функция φ , что $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ для всех n и почти всех x , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Доказательство. Из условия ясно, что $|f(x)| \leq \varphi(x)$, так что функция f суммируема и $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varphi(x)$. Поскольку интеграл разности равен разности интегралов, получаем, что теорему достаточно доказать для случая $f(x) = 0$.

Лемма 15.21. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся к нулю почти всюду. Если существует такая неотрицательная суммируемая функция φ , что $f_n \leq \varphi$ для всех n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = 0$.

Доказательство леммы. Применим лемму Фату к последовательности $\{\varphi - f_n\}$:

$$\int \varphi d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi - f_n) d\mu \leq \underline{\lim} \int (\varphi - f_n) d\mu = \int \varphi d\mu - \overline{\lim} \int f_n d\mu.$$

Следовательно, $\overline{\lim} \int f_n d\mu \leq 0$. Поскольку все члены этой последовательности неотрицательны, она сходится к нулю. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы, предположим сначала, что все $f_n(x)$ вещественны. Из неравенства $|f_n| \leq \varphi$ вытекает, что $(f_n)_+ \leq \varphi$ и $(f_n)_- \leq \varphi$, а из того, что $f_n(x) \rightarrow 0$, вытекает, что последовательности $\{(f_n)_+\}$ и $\{(f_n)_-\}$ сходятся к нулю. Из леммы теперь вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_+ d\mu = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_- d\mu = 0$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = 0$.

Если f_n комплексны, то вещественная и мнимая части f_n по модулю не превосходят $|f_n|$ и тем самым φ , так что достаточно применить результат для вещественных функций к действительной и мнимой частям f_n по отдельности. $\square$

16. Произведение мер; мера Лебега на $\mathbb{R}^n$

Главная цель этой лекции — формализовать в рамках теории меры «принцип Кавальери»: объем тела равен интегралу от площадей его плоских сечений. По ходу дела будет построена и мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ для произвольного n .

Чтобы не прерывать нить изложения, начнем со следующей чисто теоретико-множественной леммы.

Лемма 16.1. Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{B} \subset 2^X$ — булева подалгебра. Обозначим через $\mathcal{E}$ наименьшее подмножество в 2^X , содержащее $\mathcal{B}$ и обладающее следующим свойством: если $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ (соотв. $C_1 \supset C_2 \supset \dots$) — возрастающая (соотв. убывающая) последовательность элементов из $\mathcal{B}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ (соотв. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$) также принадлежит $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{E}$ является σ -алгеброй.

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathcal{E}$ является булевой подалгеброй в 2^X . Для этого, очевидно, достаточно проверить, что семейство $\mathcal{E}$ замкнуто относительно операции $\setminus$. Зафиксируем произвольное $A \in \mathcal{B}$ и покажем, что $A \setminus C \in \mathcal{E}$ для всякого $C \in \mathcal{E}$. В самом деле, мы утверждаем, что семейство подмножеств $C \subset X$, обладающих свойством $A \setminus C \in \mathcal{E}$, содержит $\mathcal{E}$; чтобы это показать, достаточно убедиться, что, во-первых, $A \setminus C \in \mathcal{E}$, как только $C \in \mathcal{B}$, и во-вторых, что если $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ (соотв. $C_1 \supset C_2 \supset \dots$) — возрастающая (соотв. убывающая) последовательность множеств, для которых $A \setminus C_i \in \mathcal{E}$ при всех i , то $A \setminus \bigcup_i C_i \in \mathcal{E}$ (соотв. $A \setminus \bigcap_i C_i \in \mathcal{E}$). Первое из этих утверждений выполнено, так как $\mathcal{B}$ — булева алгебра, а второе немедленно вытекает из законов де Моргана и определения семейства $\mathcal{E}$.

Далее, зафиксировав произвольный $B \in \mathcal{E}$, аналогичным образом покажем, что

$$\{A \subset X: A \setminus B \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}.$$

Тем самым доказано, что $\mathcal{E}$ — булева алгебра. Остается показать, что $\mathcal{E}$ замкнуто относительно счетных объединений; так как $\mathcal{E}$ замкнуто относительно конечных объединений и объединений возрастающих последовательностей, это вытекает из тождества

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup \dots \quad \square$$

Определение 16.2. Пространство с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$ называется σ -конечным, если X представляется в виде не более чем счетного объединения измеримых подмножеств конечной меры.

Если пространство с мерой σ -конечно, то, очевидно, подмножества конечной меры, о которых идет речь в этом определении, можно выбирать попарно не пересекающимися. Часто говорят, что σ -конечным является не пространство $(X, \mathcal{E}, \mu)$, а сама мера μ .

Мы построим меру на произведении пространств для случая, когда меры на обоих пространствах σ -конечны.

Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ — пространства с σ -конечными мерами. На их произведении $X \times Y$ рассмотрим σ -алгебру $\mathcal{E} * \mathcal{F}$, порожденную всевозможными подмножествами вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ измеримы.

Если $M \subset X \times Y$ — произвольное подмножество, то положим, для $x \in X$ и $y \in Y$,

$$M_x = \{y \in Y : (x, y) \in M\}, \quad M_y = \{x \in X : (x, y) \in M\}.$$

Предложение 16.3. Пусть $M \subset X \times Y$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{E} * \mathcal{F}$. Тогда:

(1) множества $M_x \subset Y$ и $M_y \subset X$ измеримы в Y и X соответственно для всяких $x \in X$ и $y \in Y$;

(2) функции $x \mapsto \nu(M_x)$ и $y \mapsto \mu(M_y)$ измеримы на X и Y соответственно;

$$(3) \int_X \nu(M_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(M_y) d\nu(y).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}$ семейство подмножеств $M \subset X \times Y$, обладающих свойствами (1)—(3). Нам достаточно показать, что $\mathcal{S} \supset \mathcal{E} * \mathcal{F}$.

Лемма 16.4. Пусть $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$, состоящее из всевозможных конечных объединений попарно непересекающихся множеств вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ измеримы. Тогда $\mathcal{B}$ является булевой подалгеброй в $2^{X \times Y}$.

Доказательство леммы. Поскольку $\emptyset$ и $X \times Y$ принадлежат $\mathcal{B}$, достаточно проверить, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно операции $\setminus$. Это тривиально следует из тождества

$$(U_1 \times V_1) \setminus (U_2 \times V_2) = ((U_1 \setminus U_2) \times (V_1 \cap V_2)) \sqcup (U_1 \times (V_1 \setminus V_2)). \quad \square$$

Заметим теперь, что включение $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}$ очевидно; следовательно, ввиду леммы 16.1 достаточно проверить, что класс $\mathcal{S}$ замкнут относительно объединений и пересечений монотонных последовательностей. Однако же если $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ (соотв. $C_1 \supset C_2 \supset \dots$) — возрастающая (соотв. убывающая) последовательность элементов из $\mathcal{S}$, то для объединения $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ (соотв. пересечения $C = \bigcap_{i=1}^n C_i$) свойство (1) выполнено ввиду того, что множества C_x и C_y являются пересечениями или объединениями множеств $(C_i)_x$ и $(C_i)_y$; свойство (2) вытекает из того, что (например, в случае с объединением) $\nu(C_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu((C_i)_x)$

ввиду предложения 14.4, а поточечный предел последовательности измеримых функций измерим. Осталось проверить свойство (3). Для случая объединения возрастающей последовательности оно доказывается так. Если $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ и $M = \bigcup_i M_i$, то положим $\varphi_i(x) = \nu((M_i)_x)$, $\varphi(x) = \nu(M_x)$, $\psi_i(y) = \mu((M_i)_y)$, $\psi(y) = \mu(M_y)$; поскольку $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ и $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ (и аналогично для ψ), по теореме Беппо Леви имеем

$$\begin{aligned} \int_X \nu(M_x) d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n(x) d\mu(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \psi_n(y) d\nu(y) = \int_Y \mu(M_y) d\nu(y). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Для случая пересечения убывающей последовательности множеств M_i проходит полностью аналогичное рассуждение (с использованием предложения 15.13 вместо теоремы Беппо Леви) в случае, когда M содержится в произведении двух подмножеств конечной меры (поскольку при использовании предложении 15.13 необходимо, чтобы интеграл от первого члена последовательности был конечен). Для произвольного же M мы воспользуемся σ -конечностью мер μ и ν : если $X = \bigsqcup X_i$, $Y = \bigsqcup Y_j$ — представления X и Y в виде дизъюнктного объединения не более чем счетного семейства подмножеств конечной меры, то для каждого из пересечений $M \cap (X_i \times Y_j)$ утверждение верно, откуда утверждение для самого M вытекает из предложения 15.7 и возможности менять порядок суммирования в двойном ряде с положительными членами. $\square$

Предложение-определение 16.5. Для $M \subset X \times Y$, принадлежащего $\mathcal{E} * \mathcal{F}$, положим

$$\lambda(M) = \int_X \nu(M_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(M_y) d\nu(y).$$

Отображение $\lambda: \mathcal{E} * \mathcal{F} \rightarrow [0; \infty]$ корректно определено, и тройка $(X \times Y, \mathcal{E} * \mathcal{F}, \lambda)$ является пространством с мерой. Эта мера обозначается $\mu \times \nu$ и называется *произведением мер* μ и ν .

Доказательство. Единственное еще не доказанное и не вполне очевидное утверждение — счетная аддитивность для $\mu \times \nu$. Если $M = \bigsqcup_{i=1}^n M_i$, то $\nu(M_x) = \sum_{i=1}^n \nu((M_i)_x)$ для всех $x \in X$. Теперь все следует из теоремы Беппо Леви, так как частичные суммы ряда из положительных функций образуют монотонно возрастающую последовательность. $\square$

Следующее утверждение, логически необходимое для построения теории, гласит, что умножение мер ассоциативно. Его простое и скучное доказательство мы оставляем читателю.

Предложение 16.6. Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ и $(Z, \mathcal{G}, \lambda)$ — пространства с σ -конечными мерами. Тогда при естественном отождествлении $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$ σ -алгебра $(\mathcal{E} * \mathcal{F}) * \mathcal{G}$ переходит в $\mathcal{E} * (\mathcal{F} * \mathcal{G})$, а мера $(\mu \times \nu) \times \lambda \rightarrow \mu \times (\nu \times \lambda)$. $\square$

Построенная нами мера на $X \times Y$ обладает техническим недостатком: подмножество множества меры нуль может вообще не быть измеримым (например, если $S \subset X$ неизмеримо, а $T \subset Y$ имеет меру нуль, то $S \times T \subset X \times Y$ неизмеримо, но содержится в имеющем меру нуль множестве $X \times T$). Для пространств с мерой, таковым недостатком не обладающих, имеется специальный термин.

Определение 16.7. Говорят, что пространство с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$ является *полным* (или что мера μ является *полной*), если всякое подмножество измеримого множества меры нуль измеримо (и имеет, естественно, меру нуль).

Например, мера Лебега на $\mathbb{R}$ полна.

Предложение 16.8. Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространство с мерой. Тогда существуют и единственны наименьшая σ -алгебра $\bar{\mathcal{E}} \supset \mathcal{E}$ и мера $\bar{\mu}: \bar{\mathcal{E}} \rightarrow [0; +\infty]$, для которых $\bar{\mu}(U) = \mu(U)$ при $U \in \mathcal{E}$ и мера $\bar{\mu}$ полна.

Доказательство. Поскольку доказательство банально, ограничимся наброском. В любом случае $\bar{\mathcal{E}}$ должно содержать все подмножества измеримых множеств меры нуль. Поэтому $\bar{\mathcal{E}}$ должно содержать и все множества $V \subset X$, обладающие таким свойством:

существует такое $U \in \mathcal{E}$, что $V \setminus U$ и $U \setminus V$ содержатся в некоторых множествах, принадлежащих $\mathcal{E}$ и имеющих меру нуль.

Тривиально проверяется, что семейство $\bar{\mathcal{E}}$, состоящее из подмножеств $V \subset X$, обладающих этим свойством, является σ -алгеброй; если определить при этом $\bar{\mu}(V) = \mu(U)$, то окажется, что $\bar{\mu}$ — мера и что такое продолжение единственно. $\square$

Меру $\bar{\mu}$ из предложения 16.8 мы будем называть *пополнением* меры μ .

Переход от меры к ее пополнению не влияет на интегралы:

Предложение 16.9. Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространство с мерой; обозначим через $(X, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mu})$ его пополнение. Если функция $f: X \rightarrow [0; +\infty]$ измерима относительно (пополненной) меры $\bar{\mu}$, то существует функция f^1 , измеримая относительно исходной меры μ и совпадающая с f почти всюду относительно μ . При этом $\int_X f d\bar{\mu} = \int_X f^1 d\mu$.

Доказательство. Из конструкции $\bar{\mu}$ ясно, что это утверждение верно для случая, когда f — характеристическая функция $\bar{\mu}$ -измеримого множества. Поскольку не более чем счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, а интеграл суммы равен сумме интегралов, оно верно и в случае, когда f — конечная линейная комбинация таких функций с неотрицательными коэффициентами, то есть простая (относительно $\bar{\mu}$) функция. Если f — произвольная $\bar{\mu}$ -измеримая функция, то $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, где функции f_i являются $\bar{\mu}$ -простыми, а их последовательность монотонна (лемма 15.12); изменяя каждую из f_i на множестве N_i меры нуль относительно μ , получим μ -измеримую функцию f_i^1 ; полагая все f_i^1 равными нулю на множестве $\bigcup_i N_i$, также имеющем меру нуль, получим монотонную последовательность μ -измеримых функций, сходящуюся к некоторой (с неизбежностью μ -измеримой) функции f^1 , совпадающей с f почти всюду относительно μ . Совпадение интегралов вытекает из теоремы Беппо Леви. $\square$

Вот основное свойство произведений мер.

Теорема 16.10 (теорема Фубини). Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ — пространства с σ -конечными мерами и функция $f: X \times Y \rightarrow [0; \infty]$ измерима относительно $\overline{\mu \times \nu}$. Тогда функция $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ измерима относительно μ для почти всех $y \in Y$, функция $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ измерима относительно ν для почти всех $x \in X$ и

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \times \nu}) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned} \quad (16.2)$$

Доказательство. Предположим для начала, что f измерима относительно (непополненной) меры $\mu \times \nu$; покажем, что в этом случае функции $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ и $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ измеримы для всех y (соответственно x), а формула (16.2) верна для интеграла по $\mu \times \nu$. В самом деле, предложение 16.3 показывает, что данное утверждение выполнено,

если f — характеристическая функция множества, измеримого относительно $\mu \times \nu$. Следовательно, формула верна и для случая, когда f — линейная комбинация таких функций, т. е. простая функция. Наконец, лемма 15.12 показывает, что ввиду теоремы Беппо Леви формула выполнена и для произвольной $(\mu \times \nu)$ -измеримой функции.

Пусть теперь f измерима относительно пополненной меры $\overline{\mu \times \nu}$. Тогда предложение 16.9 показывает, что, изменив f на некотором множестве $S \subset X \times Y$, имеющем меру нуль относительно непополненной меры $\mu \times \nu$, мы получим функцию f^1 , измеримую относительно $\mu \times \nu$. Пусть $S_X = \{x \in X : \nu(S_x) \neq 0\}$, $S_Y = \{y \in Y : \mu(S_y) \neq 0\}$; поскольку $(\mu \times \nu)(S) = 0$, из предложения 16.3 следует, что $\bar{\mu}(S_X) = \bar{\nu}(S_Y) = 0$; так как для $x \notin S_X$ имеем $\int_Y f^1(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ (и аналогично) для S_Y , все доказано. $\square$

С этого момента мы меняем терминологию и называем произведением мер μ и ν *пополненную меру* $\overline{\mu \times \nu}$.

Для произвольных суммируемых функций теорема Фубини выглядит так.

Теорема 16.11. Пусть (X, μ) и (Y, ν) — пространства с σ -конечными мерами и функция $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ суммируема относительно (пополненной) меры $\mu \times \nu$. Тогда функция $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ суммируема относительно μ для почти всех $y \in Y$, функция $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ суммируема относительно ν для почти всех $x \in X$ и

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Доказательство. Начнем с простого вспомогательного утверждения.

Лемма 16.12. Если f — положительная измеримая функция на пространстве с мерой (X, μ) и $\int_X f d\mu < \infty$, то $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$.

Доказательство леммы. Если σ_n — функция, равная n там, где $f(x) = \infty$, и нулю в остальных точках, то $\int_X f d\mu \geq \int_X \sigma_n d\mu = n\mu(f^{-1}(\infty))$; если $\mu(f^{-1}(\infty)) > 0$, то получаем противоречие, устремляя n к бесконечности. $\square$

Применяя теорему Фубини для положительных функций и лемму к функции $|f|$, получаем, что $x \mapsto \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < \infty$ для почти всех y

(и аналогично для второй переменной), откуда, пользуясь пунктом (3) предложения 15.17, получаем утверждения о суммируемости. Оставшаяся часть теоремы для случая вещественнозначной f получается из теоремы 16.10 с помощью разложения f в разность двух положительных функций, а для случая комплекснозначной f — с помощью выделения действительной и мнимой частей. $\square$

Теперь можно наконец определить меру Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Определение 16.13. Мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$ называется (пополненное) произведение n экземпляров меры Лебега на $\mathbb{R}$.

Отметим, что корректность этого определения обеспечивает предложение 16.6; из того же предложения вытекает, что произведение мер Лебега на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^{m+n}$. Отметим также, что произведения интервалов образуют счетную базу топологии на $\mathbb{R}^n$, так что всякое борелевское подмножество в $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу.

Далее слово «измеримый» означает «измеримый по Лебегу»; меру Лебега в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать μ_n .

Предложение 16.14. *Подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда существует такое борелевское подмножество $B \subset \mathbb{R}^n$, что $E \triangle B$ измеримо и $\mu(E \triangle B) = 0$.*

Доказательство. Поскольку всякое борелевское множество измеримо, часть «тогда» очевидна; докажем часть «только тогда».

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Поскольку всякое измеримое множество можно представить в виде несвязного объединения счетного семейства ограниченных измеримых множеств, достаточно рассмотреть случай, когда $E \subset \mathbb{R}$ ограничено. Из определения 14.11 вытекает, что существует такая последовательность компактных подмножеств $K_n \subset E$, что $K_j \subset K_{j+1}$ для всех j и $\mu(E \setminus K_j) \leq 1/j$. Множество $B = \bigcup K_j$ является борелевским, содержится в E , и $\mu(E \setminus B) = 0$.

Далее будем рассуждать индукцией по n . Пусть через $\mathcal{L}_n$ (соотв. $\mathcal{B}_n$) обозначена σ -алгебра измеримых (соотв. борелевских) подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathcal{L}_n$ получается пополнением из $\mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_1$, для всякого измеримого $E \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое $F \in \mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_1$, что $\mu_n(E \triangle F) = 0$. Поэтому все будет доказано, если мы установим следующее:

для всякого $F \in \mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_1$ найдется такое $B \in \mathcal{B}_n$, что $\mu_n(F \triangle B) = 0$.

Очевидно, что семейство подмножеств $F \subset \mathbb{R}^n$, обладающих этим свойством, образует σ -алгебру; поэтому для того, чтобы убедиться, что это

семейство содержит $\mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_n$, достаточно проверить, что оно содержит все множества вида $F_1 \times F_2$, где F_1 измеримо в $\mathbb{R}^{n-1}$, а F_2 измеримо в $\mathbb{R}$. По предположению индукции существуют такие борелевские подмножества $B_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $B_2 \subset \mathbb{R}$, что $\mu_{n-1}(F_1 \triangle B_1) = 0$, $\mu_1(F_2 \triangle B_2) = 0$. Остается заметить, что множество $B_1 \times B_2$ является борелевским и $\mu_n((F_1 \times F_2) \triangle (B_1 \times B_2)) = 0$. $\square$

Следующая теорема означает, что мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ «регулярна».

Теорема 16.15. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество конечной меры. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое $U \supset E$, что $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$ и такое компактное $K \subset E$, что $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$.

Доказательство.

Шаг 1. Если $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то

$$\mu(K) = \inf_{\substack{U \supset E \\ U \text{ открыто}}} \mu(U).$$

Доказательство. Пусть $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \min d(x, K) < 1/n\}$. Тогда $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, причем все U_i открыты и ограничены (и тем самым имеют конечную меру). Теперь применим следствие 14.5. $\square$

Будем говорить, что измеримое подмножество $E \subset K$ конечной меры является хорошим, если для него выполнено утверждение теоремы 16.15.

Шаг 2. Если E_1 и E_2 — хорошие множества, то множество $E_1 \setminus E_2$ также хорошее.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 14.13.

Зафиксируем какой-нибудь замкнутый куб $C \subset \mathbb{R}^n$. Из результата шага 1 следует, что все замкнутые подмножества в C (в частности, сам C) являются хорошими.

Шаг 3. Хорошие подмножества в кубе C образуют булеву алгебру.

Доказательство. Поскольку C является хорошим, а результат шага 2 показывает, что семейство хороших подмножеств в C замкнуто относительно разностей и дополнений, это семейство — булева алгебра (ср. доказательство предложения 14.13). $\square$

Шаг 4. Всякое борелевское подмножество в C является хорошим.

Доказательство. Поскольку все замкнутые подмножества в C являются хорошими, достаточно показать, что хорошие подмножества в C

образуют σ -алгебру. Так как хорошие подмножества образуют булеву алгебру, для этого достаточно показать, что семейство хороших подмножеств замкнуто относительно бесконечных несвязных объединений. Пусть теперь $E = \bigcup_i E_i \subset C$, где все E_i хорошие. Для данного $\varepsilon > 0$ обозначим через $U_i \supset E_i$ открытое множество, для которого $\mu(U_i \setminus E_i) < \varepsilon/2^i$, а через $K_i \subset U_i$ — компактное подмножество, для которого $\mu(E_i \setminus K_i) < \varepsilon/2^{i+1}$. Теперь заметим, что, во-первых,

$$\mu\left(\bigcup U_i \setminus E\right) \leq \sum \mu(U_i \setminus E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon,$$

и во-вторых: поскольку ряд $\sum E_i$ сходится, существует такое N , что $\sum_{i>N} \mu(E_i) < \varepsilon/2$, откуда

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^N K_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i \setminus K_i) + \sum_{i>N} \mu(E_i) < \varepsilon.$$

Стало быть, можно положить $U = \bigcup_i U_i$ и $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$. □

Шаг 5. Всякое измеримое подмножество в C является хорошим.

Доказательство. Ввиду результата шага 3 достаточно проверить, что хорошим является всякое подмножество меры нуль. И действительно, если $E \subset E' \subset C$, где E' — борелевское множество меры нуль, то для данного ε в качестве U можно взять для E то же множество, что и для E' , а в качестве K — одноточечное подмножество. □

Шаг 6. Всякое измеримое подмножество конечной меры является хорошим.

Доказательство. Если $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\mu(E) < \infty$, то можно представить E в виде несвязного счетного объединения ограниченных измеримых множеств E_i ; теперь повторим рассуждение из шага 4. □

Теорема доказана. □

17. Производная

Прежде чем перейти к сути дела, дадим одно важное определение и докажем один простой технический результат.

Определение 17.1. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Нормой* на V называется функция из V в $\mathbb{R}$, обозначаемая $v \mapsto \|v\|$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

- (1) $\|v\| \geq 0$ для всех $v \in V$, и $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
- (2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$;
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ для любых $v, w \in V$.

Векторное пространство, на котором задана норма, называется *нормированным пространством*.

(Дословно то же определение можно дать для векторных пространств над $\mathbb{C}$.)

Примерами норм на $\mathbb{R}^n$ могут послужить L^p -метрики на $\mathbb{R}^n$ (норма — расстояние до начала координат). Другой пример — пространство ограниченных непрерывных функций с $\sup$ -нормой.

Норма на векторном пространстве задает на нем метрику (в которой расстояние между векторами v и w равно $\|v - w\|$), а тем самым и топологию.

Нормированные пространства (в первую очередь бесконечномерные) играют важную роль в более продвинутых разделах анализа, но нам сейчас будет нужен только (очень простой) конечномерный случай.

Предложение 17.2. Пусть V и W — конечномерные пространства над $\mathbb{R}$; предположим, что на V выбрана норма $\|\cdot\|_1$, а на W — норма $\|\cdot\|_2$. Тогда для всякого линейного отображения $A: V \rightarrow W$ существует такое $C > 0$, что $\|Av\|_2 \leq C\|v\|_1$ для всех $v \in V$.

(В бесконечномерном случае это утверждение совершенно неверно!)

Доказательство. Выберем раз и навсегда базис $(e_1, \dots, e_m)$ в V и базис $(f_1, \dots, f_n)$ в W ; с помощью этих базисов отождествим V и W с $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ и введем на этих пространствах топологии, соответствующие при таких отождествлениях стандартным топологиям на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m \in V$, то

$$\|v\|_1 \leq \sum |x_i| \cdot \|e_i\| \leq C \max(|x_i|),$$

где $C = m \max(\|e_i\|_1)$; следовательно, функция $\|\cdot\|_1$ непрерывна на V . Множество

$$S = \{x_1 e_1 + \dots + x_m e_m : \max(|x_i|) = 1\}$$

компактно и состоит из ненулевых векторов; поэтому функция $\|\cdot\|_1$ достигает на нем наименьшего значения $\lambda > 0$. Если теперь $v = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m \neq 0$, то $v / \max(|x_i|) \in S$, откуда

$$\|v\|_1 = \max(|x_i|) \|v / \max(|x_i|)\|_1 \geq \lambda \max(|x_i|),$$

или

$$\max(|x_i|) \leq \lambda^{-1} \|v\|_1. \quad (17.1)$$

Если (a_{ij}) — матрица отображения A в указанных базисах и $v = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$, то

$$\begin{aligned} \|Av\|_2 &= \left\| \sum a_{ij} x_j f_i \right\|_2 \leq \sum |a_{ij}| \cdot |x_j| \cdot \|f_j\|_2 \leq \\ &\leq mn \max(|a_{ij}|) \max(|x_j|) \max(\|f_i\|_2) \leq mn \max(|a_{ij}|) \max(\|f_i\|_2) \lambda^{-1} \|v\|_1, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из (17.1). Так как коэффициент при $\|v\|$ от v не зависит, все доказано. $\square$

Следствие 17.3. *Всякое линейное отображение конечномерных нормированных векторных пространств непрерывно.*

Доказательство. Оно даже равномерно непрерывно: в обозначениях предложения 17.2 имеем $\|Av - Aw\|_2 \leq C \|v - w\|_1$. $\square$

Следствие 17.4. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на нем. Тогда существуют такие положительные числа m и M , что $m\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M\|v\|_1$ для всех $v \in V$.*

Доказательство. В предложении 17.2 положите $V = W$, а в качестве A возьмите тождественный оператор; затем поменяйте местами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. $\square$

Следствие 17.4 показывает, что, когда речь идет о функциях на подмножестве конечномерного пространства, запись типа $f(v) = o(\|v\|)$ имеет одинаковый смысл независимо от того, какая норма на этом пространстве выбрана.

Следствие 17.5. *На конечномерном векторном пространстве все нормы задают одну и ту же топологию.*

В бесконечномерном случае все следствия 17.3—17.5 также неверны. Теперь мы можем дать одно из основных определений анализа.

Определение 17.6. Пусть E и F — конечномерные векторные пространства над $\mathbb{R}$ и $U \subset E$ — открытое подмножество. Тогда отображение $f: U \rightarrow F$ называется *дифференцируемым* в точке $p \in U$, если существует линейное отображение $A: E \rightarrow F$, для которого

$$\|f(p+h) - (f(p) + A(h))\| = o(\|h\|) \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

(через $\|\cdot\|$ обозначены нормы на E и F — все равно какие ввиду следствия 17.4).

При этом линейное отображение $A: E \rightarrow F$ называется *производной* отображения f в точке p (иногда говорят не «производная», а «дифференциал», но у нас этот термин будет иметь другой смысл).

Возможные обозначения для производной: $Df(p)$, $f'(p)$, $T_p f$, f_* ; ни одно из них не является абсолютно общепринятым.

Если $E = F = \mathbb{R}$, то линейное отображение $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — это просто умножение на некоторое число a , и ясно, что это число — не что иное, как известная нам производная $f'(a)$.

Поскольку величина, обозначенная через $o(\|h\|)$, стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, и поскольку, ввиду непрерывности всякого линейного отображения конечномерных пространств, $\lim_{h \rightarrow 0} (f(p) + A(h)) = f(p)$, получаем, что $\lim_{h \rightarrow 0} f(p + h) = f(p)$, так что дифференцируемое в точке p отображение будет непрерывным в этой точке.

Перечислим простейшие свойства производной.

Предложение 17.7. *Если $A: E \rightarrow F$ — линейное отображение, то оно дифференцируемо в любой точке $p \in E$ и его производная равна A .*

Это очевидно.

Предложение 17.8. *Если, в обозначениях определения 17.6, отображение $f: U \rightarrow F$ дифференцируемо в точке $p \in U$, то его производная в точке p единственна.*

Доказательство. Если каждое из линейных отображений $A, B: E \rightarrow F$ является производной отображения f в точке p , то, вычитая друг из друга равенства $f(p + h) = f(p) + A(h) + \varphi(h)$ и $f(p + h) = f(p) + B(h) + \psi(h)$, получаем, что $A(h) - B(h) = \psi(h) - \varphi(h)$. Правая часть этого равенства есть $o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$; если существует хотя бы одно v , для которого $A(v) - B(v) = w \neq 0$, то $\|A(tv) - B(tv)\| = |t| \cdot \|w\|$, и это не есть $o(\|tv\|)$. Значит, $A = B$. $\square$

Следующее предложение — «правило дифференцирования сложной функции» в общем виде.

Предложение 17.9. *Пусть E , F и G — конечномерные векторные пространства, $U \subset E$ и $V \subset F$ — открытые подмножества, $f: U \rightarrow V$ и $g: V \rightarrow G$ — отображения. Если, для некоторой точки $p \in U$, отображение f дифференцируемо в точке p , а отображение g дифференцируемо в точке $f(p)$, то отображение $g \circ f: U \rightarrow G$ дифференцируемо в точке p , причем $D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p)$.*

Доказательство. Зафиксируем какие-нибудь нормы на пространствах E , F и G ; все эти нормы будем далее обозначать $\|\cdot\|$ — к путанице это не приведет.

Пусть $Df(p) = A$, $Dg(f(p)) = B$; положим

$$\begin{aligned}\tilde{f}(h) &= f(p+h) - f(p) - Ah, \\ \tilde{g}(k) &= g(f(p)+k) - g(f(p)) - Bk.\end{aligned}$$

По определению производной, существует число $\varepsilon > 0$ и функции $\varphi, \psi: [0; \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, обладающие следующими свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0; \quad \|\tilde{f}(h)\| \leq \varphi(\|h\|)\|h\|; \quad \|\tilde{g}(k)\| \leq \psi(\|k\|)\|k\|$$

(неравенства выполняются при $\|h\|$ и $\|k\|$, не превосходящих ε). Кроме того, по предложению 17.2 существуют такие константы C_1 и C_2 , что

$$\|Ah\| \leq C_1\|h\|, \quad \|Bk\| \leq C_2\|k\|$$

для всех $h \in E$, $k \in F$. Поскольку, наконец, из дифференцируемости следует непрерывность, для всех достаточно малых $\|h\|$ имеем $\|f(p+h) - f(p)\| \leq \varepsilon$. Для таких h имеем

$$\begin{aligned}g(f(p+h)) - g(f(p)) &= \\ &= g(f(p) + Ah + \tilde{f}(h)) - g(f(p)) = BAh + \underbrace{B\tilde{f}(h) + \tilde{g}(Ah + \tilde{f}(h))}_{R(h)}.\end{aligned}$$

Оценим $R(h)$:

$$\begin{aligned}\|R(h)\| &\leq \|B\tilde{f}(h)\| + \|\tilde{g}(Ah + \tilde{f}(h))\| \leq \\ &\leq C_2\varphi(\|h\|)\|h\| + \psi(Ah + \tilde{f}(h))(\|Ah\| + \|\tilde{f}(h)\|) \leq \\ &\leq C_2\varphi(\|h\|)\|h\| + C_1\psi(Ah + \tilde{f}(h))\|h\| + \psi(Ah + \tilde{f}(h))\varphi(\|h\|)\|h\|.\end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты при $\|h\|$ стремятся к нулю при $\|h\| \rightarrow 0$, имеем $D(g \circ f)(p) = BA$, что и требовалось. $\square$

Выясним, какой матрицей задается производная отображения.

Пусть $(u_1, \dots, u_m)$ и $(v_1, \dots, v_n)$ — стандартные базисы в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; у вектора u_i (или v_i) на i -м месте стоит единица, а на остальных — нули. В качестве норм в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ выберем максимум модуля координат.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, и пусть отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ действует по формуле

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Если f дифференцируемо в точке $p = (p_1, \dots, p_m) \in U$ и $Df(p) = A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, то $f(p+h) = f(p) + A(h) + o(\|h\|)$. Следовательно,

$$f(p + tu_j) = f(p) + A(tu_j) + o(\|tu_j\|) = f(p) + tA(u_j) + o(t),$$

откуда

$$A(u_j) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(f(p + tu_j) - f(p)).$$

Если A записывается матрицей (a_{ij}) , т. е. $A(u_j) = \sum a_{ij}v_i$, то, отделяя i -ю координату, получим, что

$$a_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \dots, p_n) - f_i(p_1, \dots, p_n)}{t}.$$

Иными словами, a_{ij} — производная от функции $y \mapsto f_i(p_1, \dots, p_{j-1}, y, p_{j+1}, \dots, p_n)$ в точке p_j . Для такого рода производных есть специальное название и обозначение.

Определение 17.10. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция. Если $p = (p_1, \dots, p_m) \in U$, то предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

(если он существует) называется *i -й частной производной функции f в точке p* и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ (иногда пишут $D_i f(p)$; применяются и другие обозначения).

Пользуясь этими обозначениями, можно подвести итоги нашего обсуждения так.

Предложение 17.11. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, и пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — отображение из U в $\mathbb{R}^n$. Если f дифференцируемо в точке $p \in U$, то линейное отображение $Df(p): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ в стандартных базисах записывается матрицей $(\partial f_i / \partial x_j)(p)$.

Поскольку композиции линейных отображений соответствует произведение матриц, из предложения 17.9 вытекает такое

Следствие 17.12. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества, $f: U \rightarrow V$ — отображение, дифференцируемое всюду на U , и $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение, дифференцируемое всюду на V . Если $f(x_1, \dots, x_m) = (u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m))$, то

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Представляющийся на первый взгляд более общим случай, когда g — отображение не в $\mathbb{R}$, а в $\mathbb{R}^k$ для некоторого k , никаких новых формул для частных производных не дает.

Из теории функций одного переменного мы знаем, что полезно, наряду с дифференцируемыми функциями, рассматривать функции класса C^r . В нашем случае их можно определить следующим образом.

Если E и F — векторные пространства, $U \subset E$ — открытое множество, и $f: U \rightarrow F$ — отображение, дифференцируемое в каждой точке U , то определено отображение $Df: U \rightarrow \text{Hom}(E, F)$, действующее по формуле $p \mapsto Df(p)$ (напомним, что $\text{Hom}(E, F)$ — множество линейных отображений из E в F , т. е. опять векторное пространство). Поэтому можно спросить, будет ли непрерывным или дифференцируемым отображение Df .

Определение 17.13. Пусть E и F — векторные пространства, $U \subset E$ — открытое множество, и $f: U \rightarrow F$ — отображение, дифференцируемое в каждой точке U . Говорят, что отображение f *принадлежит к классу C^1* , если отображение $Df: U \rightarrow \text{Hom}(E, F)$ непрерывно; говорят, что f *принадлежит к классу C^r* , где $r \geq 2$ — целое число, если отображение $Df: U \rightarrow \text{Hom}(E, F)$ принадлежит к классу C^{r-1} ; говорят, наконец, что f *принадлежит к классу C^∞* , если f принадлежит к классу C^r для всякого $r \in \mathbb{N}$. Наконец, отображения класса C^r (для некоторого r) называют *гладкими*.

Предложение 17.14. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — отображение из U в $\mathbb{R}^n$. Отображение f принадлежит классу C^1 тогда и только тогда, когда все частные производные $\partial f_i / \partial x_j$ существуют и непрерывны всюду на U .

Из одного только существования частных производных дифференцируемость, вообще говоря, не следует.

Доказательство. «Только тогда»: при стандартном отождествлении $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ с пространством $(m \times n)$ -матриц отображение $p \mapsto Df(p)$ переводит точку p в матрицу $((\partial f_i / \partial x_j)(p))$, и это отображение непрерывно тогда и только тогда, когда все $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны.

«Тогда»: пусть все $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны, и пусть $p \in U$. Достаточно установить дифференцируемость отображения f в точке p . Пусть $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей $a_{ij} = (\partial f_i / \partial x_j)(p)$. Согласно предложению 17.11, производная f в точке p , если она существует, обязана равняться A . Покажем, что так оно и есть.

В качестве нормы в обоих пространствах будем использовать максимум модуля координат. Тогда, расшифровывая определения получаем,

что нам необходимо установить соотношения

$$\left| f_i(p+h) - f_i(p) - \sum_{j=1}^m (\partial f_i / \partial x_j)(p) h_j \right| = o(\|h\|)$$

для всякого i (в вышеприведенной формуле подразумевается, что $h = (h_1, \dots, h_m)$). Для этого, в свою очередь, докажем такую лемму.

Лемма 17.15. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, для которой в каждой точке множества U существуют все частные производные $\partial f / \partial x_j$. Если $\Delta \subset U$ — параллелепипед и $p \in \Delta$, то для всякого $h \in \mathbb{R}^m$ такого, что $p+h \in \Delta$, существуют такие точки $\pi_1, \dots, \pi_m \in \Delta$, что

$$f(p+h) - f(p) = \sum_{j=1}^m (\partial f / \partial x_j)(\pi_j) h_j.$$

Доказательство леммы. Положим $p = (p_1, \dots, p_m)$, $h = (h_1, \dots, h_m)$, и преобразуем разность $f(p+h) - f(p)$ так:

$$\begin{aligned} f(p+h) - f(p) &= \\ &= (f(p_1 + h_1, p_2 + h_2, \dots, p_m + h_m) - f(p_1, p_2 + h_2, \dots, p_m + h_m)) + \\ &+ (f(p_1, p_2 + h_2, \dots, p_m + h_m) - f(p_1, p_2, p_3 + h_3, \dots, p_m + h_m)) + \dots \\ &\dots + (f(p_1, \dots, p_{m-1}, p_m + h_m) - f(p_1, \dots, p_{m-1}, p_m)). \end{aligned}$$

Из теоремы Лагранжа вытекает, что j -я скобка равна

$$(\partial f / \partial x_j)(p_1 + h_1, \dots, p_{j-1} + h_{j-1}, \xi_j, p_{j+1}, \dots, p_m) \cdot h_j,$$

где число ξ_j лежит между p_j и $p_j + h_j$. Полагая

$$\pi_j = (p_1 + h_1, \dots, p_{j-1} + h_{j-1}, \xi_j, p_{j+1}, \dots, p_m),$$

получаем утверждение леммы. $\square$

Применим доказанную лемму к функции f_i . Пусть $\Delta \subset U$ — параллелепипед, содержащий точку p . Если h таково, что $p+h \in \Delta$, то из леммы, примененной к функции f_i , вытекает, что

$$\begin{aligned} \left| f_i(p+h) - f_i(p) - \sum_{j=1}^m (\partial f_i / \partial x_j)(p) h_j \right| &\leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m |(\partial f_i / \partial x_j)(\pi_j) - (\partial f_i / \partial x_j)(p)| \right) \cdot |h_j|. \quad (17.2) \end{aligned}$$

Положим

$$M(\varepsilon) = \sup_{\substack{\|q-p\| \leq \varepsilon \\ 1 \leq j \leq m}} |(\partial f_i / \partial x_j)(q) - (\partial f_i / \partial x_j)(p)|.$$

Из неравенства (17.2) вытекает, что

$$\left| f_i(p+h) - f_i(p) - \sum_{j=1}^m (\partial f_i / \partial x_j)(p) h_j \right| \leq nM(\varepsilon) \cdot \|h\| \quad (17.3)$$

при $\|h\| \leq \varepsilon$; с другой стороны, из непрерывности всех частных производных в точке p следует, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon) = 0$. Значит, левая часть неравенства (17.3) есть $o(\|h\|)$, что и требовалось. $\square$

18. Высшие производные

Посмотрим повнимательнее на вторую производную.

Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^2 , где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Отображение Df ставит в соответствие каждой точке $p \in U$ линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, причем, если $(e_1, \dots, e_n)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, отображение $Df(p)$, как мы знаем, переводит e_i в $(\partial f / \partial x_i)(p)$. Поскольку линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ также образуют n -мерное векторное пространство, можно считать, что Df — это отображение из U в n -мерное пространство, действующее по формуле

$$p \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \right).$$

Поскольку f — функция класса C^2 , отображение Df также дифференцируемо. Его производная в точке $p \in U$ — это линейное отображение двух n -мерных пространств, которое задается матрицей (b_{ij}) , где $b_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(p)$. (В силу предложения 17.14 функция принадлежит классу C^2 тогда и только тогда, когда все эти «вторые частные производные» существуют и непрерывны всюду на U .) В этом месте нас ожидает приятный сюрприз: матрица (b_{ij}) всегда симметрична!

Предложение 18.1. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^2 , где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Тогда для любых $i, j \in [1; n]$ на U верно тождество $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$.

Доказательство. Зафиксировав значения всех переменных, кроме x_i и x_j , можно считать, что $U \subset \mathbb{R}^2$ и $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция двух переменных (мы их будем обозначать x и y). Частную производную функции f по x (соотв. по y) будем обозначать f_x (соотв. f_y) — так иногда

обозначают частные производные в случае, когда переменные обозначены разными буквами.

Заметим, что для доказательства тождества $(f_x)_y = (f_y)_x$ нам достаточно показать, что интегралы от этих функций по любому квадрату, содержащемуся в U , совпадают. В самом деле, если бы значения этих двух непрерывных функций различались в какой-то точке U , то на некотором квадрате, содержащем эту точку, разность $(f_x)_y - (f_y)_x$ была бы строго положительна или строго отрицательна, так что интегралы от $(f_x)_y$ и $(f_y)_x$ по этому квадрату были бы различны.

Пусть теперь $\Delta = [a; a+h] \times [b; b+h]$ — произвольный квадрат, содержащийся в U . Покажем, что интегралы по Δ от каждой из функций $(f_x)_y$ и $(f_y)_x$ равны $f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b)$. Вот как это делается для $(f_x)_y$:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} (f_x)_y dx dy &= \int_a^{a+h} \left(\int_b^{b+h} (f_x)_y dy \right) dx = \int_a^{a+h} (f_x(x, b+h) - f_x(x, b)) dx = \\ &= \int_a^{a+h} f_x(x, b+h) dx - \int_a^{a+h} f_x(x, b) dx = \\ &= (f(a+h, b+h) - f(a, b+h)) - (f(a+h, b) - f(a, b)) = \\ &= f(a+h, a+h) - f(a+h, a) - f(a, a+h) + f(a, b). \end{aligned}$$

Если вычислить интеграл от $(f_y)_x$, интегрируя сначала по dx , а затем по dy , получится, очевидно, тот же результат. Это завершает доказательство предложения. $\square$

Для функций одного переменного высшие производные участвуют в формуле Тейлора. Для функций нескольких переменных формула Тейлора также имеет место и даже, при подходящем выборе обозначений, записывается почти так же. С обозначений мы и начнем.

Зафиксируем натуральное число n («число переменных»). *Мультииндексом* называется последовательность n целых неотрицательных чисел. Если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, то полагают $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, и $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; если еще f — функция класса $C^{|\alpha|}$, то полагают $D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f$ (иными словами, то, что получится, если функцию f продифференцировать α_1 раз по x_1 , α_2 раз по x_2 и т.д.; если α состоит из одних нулей, то $D^\alpha f = f$). Например, «полиномиальная теорема» записывается так: $(x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha$.

Теорема 18.2 (формула Тейлора). Пусть f — функция класса C^r на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для всякой $a \in U$ имеем

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + R(a, h),$$

где $|R(a, h)| \leq \varphi(a, h) \|h\|^r$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(a, h) = 0$. Более того, у всякой точки a существует такая окрестность $V \subset U$, что $\varphi(a, h)$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ равномерно по $a \in V$.

(На жаргоне это звучит так: $R(a, h) = o(\|h\|^r)$, причем o локально равномерно по a .)

Доказательство. Для всякой функции $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$\omega_\psi(\varepsilon) = \sup_{\|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon} \|\psi(x_1) - \psi(x_2)\|.$$

Если ψ равномерно непрерывна, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\psi(\varepsilon) = 0$.

Лемма 18.3. Пусть $f: (p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^r . Тогда для всякого $a \in (p, q)$ имеем

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^r \frac{d^k f}{dx^k}(a) h^k \right| \leq \omega_{f^{(r)}}(|h|) |h|^r.$$

Доказательство леммы. Положим $f_1(t) = f(a+t) - \sum_{k=0}^r \frac{d^k f}{dx^k}(a) t^k$.

Тогда $d^s f/dt^s(a) = 0$ при $0 \leq s \leq r$; так как $f_1^{(r)}(t) = f^{(r)}(a+t) - f^{(r)}(a)$, имеем $\omega_{f^{(r)}}(\varepsilon) = \omega_{f_1^{(r)}}(\varepsilon)$.

Применим теперь r -кратно к функции f_1 на отрезке $[0; h]$ формулу Лагранжа. Получим

$$\begin{aligned} f_1(h) &= f_1(h) - f_1(0) = h f_1'(\theta_1 h) = h \cdot \theta_1 h f_1''(\theta_2 \theta_1 h) = \dots \\ &\dots = h^r \theta_1 \dots \theta_{r-1} f_1^{(r)}(\theta_r \theta_1 \dots \theta_r h), \end{aligned}$$

где $0 < \theta_i < 1$. Поскольку

$$|f_1^{(r)}(\theta_1 \dots \theta_r h)| = |f_1^{(r)}(\theta_1 \dots \theta_r h) - f_1^{(r)}(0)| \leq \omega_{f_1^{(r)}}(|h|) = \omega_{f^{(r)}}(|h|),$$

лемма доказана. □

Лемма 18.4.

$$\frac{d^l f(t)}{dt^l} = \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} h^\alpha D^\alpha f(a+th).$$

Доказательство леммы. Ввиду следствия 17.12 имеем

$$\frac{d}{dt}f(a+th) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th). \quad (18.1)$$

Иными словами, однократное дифференцирование $f(a+th)$ по t равносильно применению к f оператора $h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ (с последующей подстановкой $a+th$ в f). Поскольку отдельные слагаемые $h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ коммутируют друг с другом (h_i являются константами и тем самым выносятся за производные, а частные дифференцирования по различным переменным коммутируют ввиду предложения 18.1), при применении r -й степени этого оператора можно раскрыть скобки и привести подобные так же, как при возведении в r -ю степень суммы n переменных. Ввиду «полиномиальной теоремы» при этом получается именно то, что утверждалось. $\square$

Положим теперь

$$\omega(\varepsilon) = N! \cdot \max_{|\alpha|=r} \omega_{D^\alpha} f(\varepsilon),$$

где $N = \binom{r+n-1}{n-1}$ — количество мультииндексов степени r . Применяя лемму 18.3 к функции $t \mapsto f(a+th)$ на отрезке $[0, 1]$, получим, с учетом леммы 18.4, что

$$\left| f(a+h) - \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha \right| \leq \omega(|h|) \|h\|^r,$$

где $\|h\| = \max |h_i|$. Осталось заметить, что у всякой точки $a \in U$ существует окрестность V с компактным замыканием, содержащимся в U ; на этой окрестности все функции $D^\alpha f$ при $|\alpha| \leq r$ являются равномерно непрерывными, поэтому если определять ω только на V , то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon) = 0$, что и доказывает теорему. $\square$

19. Теорема об обратной функции

Вся эта лекция будет посвящена доказательству одной теоремы, являющейся одним из основных результатов многомерного анализа. Слова «векторное пространство» будут означать «конечномерное векторное пространство».

Определение 19.1. Пусть $V_1 \subset E_1$ и $V_2 \subset E_2$ — открытые подмножества в конечномерных векторных пространствах. Отображение $f: E_1 \rightarrow E_2$ называется *диффеоморфизмом класса C^r* , если оно является гомеоморфизмом и при этом f и f^{-1} гладки класса C^r .

Если f — диффеоморфизм, то его производная в любой точке является изоморфизмом (так что, в частности, $m = n$).

Теорема 19.2. Пусть E и F — конечномерные векторные пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество и $f: U \rightarrow F$ — отображение класса C^r . Предположим, что для некоторой точки $p \in U$ отображение $Df(p): E \rightarrow F$ является изоморфизмом. Тогда существует такое содержащее точку p открытое подмножество $U_1 \subset U$, что $f(U_1) \subset F$ — открытое множество и ограничение $f|_{U_1}: U_1 \rightarrow f(U_1)$ является диффеоморфизмом класса C^r .

Ясно, что в условиях этой теоремы обязательно будет выполнено равенство $\dim E = \dim F$. Если при некотором выборе базисов в E и F отображение f записывается формулой

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)),$$

то $Df(p)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(p) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Такого рода определители, составленные из частных производных, называются *якобианами*.

Для доказательства теоремы положим $n = \dim E = \dim F$ и выберем на пространствах E и F нормы — для определенности, L^∞ -нормы (максимум модулей координат).

Нормой линейного отображения $A: E \rightarrow F$, где E и F — нормированные векторные пространства, называется число

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Очевидно, $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. Если E и F конечномерны, то $\|A\|$ обязательно конечна (см. следствие 17.2). Функция $A \mapsto \|A\|$ непрерывна на $\text{Hom}(E, F)$ (это следует, например, из очевидного неравенства $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, показывающего, что указанная

функция является нормой на векторном пространстве $\text{Hom}(E, F)$). Если $A: E \rightarrow F$ — изоморфизм конечномерных нормированных линейных пространств, то, очевидно, для любых $v, w \in E$ имеют место неравенства

$$\|A^{-1}\|^{-1} \cdot \|v - w\| \leq \|Av - Aw\| \leq \|A\| \cdot \|v - w\|. \quad (19.1)$$

Нам понадобится следующая оценка.

Лемма 19.3. *В условиях теоремы для всякой точки $a \in U$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V \ni a$, обладающая следующим свойством: если $x \in V$, $x + h \in V$ то $\|f(x + h) - f(x) - f'(x) \cdot h\| \leq \varepsilon \|h\|$.*

Доказательство. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$, где $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$; применим к каждой из f_i теорему 18.2 при $r = 1$. $\square$

Теперь можно приступить непосредственно к доказательству теоремы об обратной функции.

Лемма 19.4. *Пусть E и F — конечномерные пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество, $f: U \rightarrow F$ — отображение класса C^1 . Если $f'(a)$ является изоморфизмом для некоторой точки $a \in U$, то существует такая окрестность $V \ni a$, что $f(p) \neq f(q)$, как только $p, q \in V$ и $p \neq q$.*

Доказательство. Так как f принадлежит классу C^1 и $f'(a)$ является изоморфизмом, существуют окрестность $V_1 \ni a$ и число $M > 0$, обладающие следующим свойством: для всех $b \in V_1$ отображение $f'(b)$ является изоморфизмом и $\|(f'(b))^{-1}\| \leq M$. Применяя теперь лемму 19.3 для $\varepsilon = 1/2M$, получим, что у точки a есть окрестность $V \subset V_1$ со следующим свойством: если $x \in V$, $x + h \in V$ то

$$f(x + h) - f(x) = f'(x) \cdot h + R(x, h),$$

где $\|R(x, h)\| \leq \|h\|/2M$. Поскольку, ввиду неравенства (19.1), $\|f'(x)h\| \geq \|h\|/M$, имеем $\|R(x, h)\| < \|f'(x) \cdot h\|$, откуда $f(x + h) - f(x) \neq 0$. $\square$

Итак, отображение класса C^1 с невырожденной производной будет локально взаимно однозначно. На следующем (ключевом) шаге мы установим, что такое отображение, как говорят, *открыто* — переводит открытые множества в открытые.

Лемма 19.5. *Пусть E и F — конечномерные пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество, $f: U \rightarrow F$ — отображение класса C^1 . Если $f'(a)$ является изоморфизмом для всякой точки $a \in U$, то множество $f(U) \subset F$ открыто.*

Доказательство. Пусть $a \in U$. Нам надо доказать, что существует окрестность $W \ni f(a)$, обладающая следующим свойством: для всякого $y \in W$ найдется такой $x \in U$, что $f(x) = y$. Мы построим требуемый x с помощью так называемого «метода Ньютона». Именно, для всех x , близких к a , выполнено приближенное равенство $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Если бы это равенство было точным (иными словами, если бы отображение f было аффинным), то решение уравнения $f(x) = y$ было бы очевидно: поскольку линейное отображение $f'(a)$ обратимо, можно (и нужно) было бы взять $x = x_1 = a + (f'(a))^{-1}(y - f(a))$. В общем случае точка x_1 является всего лишь приближенным решением уравнения $f(x) = y$; запишем теперь приближенное равенство $f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ и, заменяя $\approx$ на $=$, найдем решение уравнения $f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = y$; это решение есть $x_2 = x_1 + (f'(x_1))^{-1}(y - f(x_1))$. Продолжая аналогичным образом, получим рекуррентную последовательность $\{x_n\}$ точек-последовательных приближений

$$x_0 = a; \quad x_n = x_{n-1} + (f'(x_{n-1}))^{-1}(y - f(x_{n-1})). \quad (19.2)$$

Хочется надеяться, что эта последовательность будет сходиться к точке $x \in U$ и что $f(x) = y$. Покажем, что при всех y , достаточно близких к $f(a)$, так и будет.

Рассуждение начинается так же, как доказательство леммы 19.4: ввиду непрерывности производной от f существует такая окрестность $V_1 \ni a$ и константа $M > 0$, что для всех $p \in V_1$ имеем $\|(f'(p))^{-1}\| \leq M$, и при этом по лемме 19.3 существует окрестность $V_2 \ni a$, содержащаяся в V_1 и обладающая тем свойством, что если $x', x'' \in V_2$, то $\|f(x'') - f(x') - f'(x)(x'' - x')\| \leq \|x'' - x'\|/2M$. Из (19.2) теперь вытекает, что если $x_{n-1}, x_n \in V_2$, то

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})f'(x_{n-1})^{-1}(y - f(x_{n-1})) + R_n = y + R_n, \quad (19.3)$$

где

$$\begin{aligned} \|R_n\| &\leq \frac{1}{2M} \|(f'(x_{n-1}))^{-1}(y - f(x_{n-1}))\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2M} \cdot M \|y - f(x_{n-1})\| \leq \frac{1}{2} \|y - f(x_{n-1})\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|y - f(x_n)\| \leq \frac{1}{2} \|y - f(x_{n-1})\|, \quad (19.4)$$

откуда $\lim f(x_n) = y$, так что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке x , то $f(x) = y$. Впрочем, помимо сходимости последовательности $\{x_n\}$ надо еще обеспечить, чтобы все x_n принадлежали V_2 ,

иначе (19.3) и последующая оценка не будет иметь смысла. Чтобы добиться еще и этого, заметим, что при $x_1, \dots, x_{n-1} \in V_2$ из рекуррентной формулы (19.2) и (19.4) вытекает, что

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq M \|f(x_{n-1}) - y\| \leq M \|f(a) - y\| / 2^{n-1}. \quad (19.5)$$

Следовательно, если точки $x_1, \dots, x_{n-1}$ построены, то

$$\begin{aligned} \|x_n - a\| &\leq \sum_{k=1}^n \|x_k - x_{k-1}\| \leq M \|f(a) - y\| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \leq \\ &\leq 2M \|f(a) - y\|. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Если теперь V_2 содержит шар радиуса δ (относительно нормы $\|\cdot\|$) с центром в точке a , и если $\|f(a) - y\| < \delta/2M$, то из (19.6) следует, что $\|x_n - a\| < \delta$, так что $x_n \in V_2$ для всех n ; поскольку, кроме того, ряд $x_0 + \sum_{i \geq 1} (x_i - x_{i-1})$ абсолютно сходится по норме ввиду (19.5), последовательность $\{x_n\}$ сходится. Стало быть, окрестность точки $f(a)$ с радиусом $\delta/2M$ содержится в образе отображения f . $\square$

Завершим доказательство теоремы. Пусть $f: U \rightarrow F$ — отображение класса C^r , и пусть для некоторой точки $a \in U$ отображение $f'(a): E \rightarrow F$ является изоморфизмом (обозначения U , E и F имеют прежний смысл). Уменьшая при необходимости открытое множество U , можно считать, что $f'(p)$ — изоморфизм для всех $p \in U$ (ввиду непрерывности f') и что f взаимно однозначно (лемма 19.4). Лемма 19.5 гарантирует, что образ открытого множества при отображении f открыт. Следовательно, $f(U)$ открыто в F и ограничение $f|_U: U \rightarrow f(U)$ — гомеоморфизм. Пусть $g: f(U) \rightarrow U$ — обратное (непрерывное, так как f открыто) отображение. Покажем, что g принадлежит классу C^r . В самом деле, пусть $a \in U$ и $b = f(a)$. Покажем, что g дифференцируемо в точке b и что его производная равна $(f'(a))^{-1}$ (ничему другому она равняться и не могла бы!). Нам нужно доказать, что

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{\|g(y) - g(b) - ((f'(a))^{-1})(y - b)\|}{\|y - b\|} = 0.$$

Поскольку f и g — взаимно обратные гомеоморфизмы, это равносильно равенству

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|x - a - ((f'(a))^{-1})(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = 0. \quad (19.7)$$

Поскольку f дифференцируемо в точке a , выполнено равенство $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \psi(x)$, где $\|\psi(x)\| = o(\|x - a\|)$. Подставляя это

в (19.7), получаем, что надо доказать соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f'(a)^{-1}(\psi(x))\|}{f'(a)(x-a) + \psi(x)} = 0. \quad (19.8)$$

Так как f непрерывно дифференцируемо, существует такое $M > 0$, что при всех x , достаточно близких к a , имеем $\|(f'(x))^{-1}\| \leq M$, откуда $\|f'(a)(x-a)\| \geq \|x-a\|/M$; уменьшая при необходимости окрестность, в которой лежит x , можно добиться того, что $\|\psi(x)\| \leq \|x-a\|/2M$; значит, для всех x , достаточно близких к a , норма знаменателя не меньше, чем $\|x-a\|/2M$. Равенство (19.8) отсюда следует, поскольку числитель в (19.8), очевидно, есть $o(\|x-a\|)$.

Так как $g'(b) = (f'(g(b)))^{-1}$, непрерывная дифференцируемость g следует из непрерывности отображения g и операции взятия обратной матрицы.

Заметим, наконец, что при записи производных от f и g в матричном виде коэффициенты матрицы $g' = (f')^{-1}$ будут рациональными функциями от коэффициентов матрицы f' ; поскольку последние, по условию, являются r раз непрерывно дифференцируемыми функциями, таковы и коэффициенты матрицы g' . Все доказано.

20. Теорема о неявной функции

Пусть переменные x и y связаны соотношением $f(x, y) = 0$. Можно ли из этого соотношения выразить y как функцию от x ? Точнее, пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть $p = (a, b)$ — такая точка, что $f(a, b) = 0$. По самому определению производной наше соотношение можно неформально записать в виде

$$0 = f(x, y) \approx f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b).$$

Если бы в этой формуле вместо $\approx$ стояло $=$, то вопрос о выражении y через x решился бы с очевидностью: если коэффициент при $(y-b)$, то есть $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$, отличен от нуля, то y выражается через x , в противном случае — нет. С помощью теоремы об обратной функции мы сейчас покажем, что *локально* дело обстоит так же, даже если не заменять функцию f на ее линеаризацию; если $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, то существуют такие открытые множества $W \ni a$ и $V \ni b$, что для всякого $x \in W$ существует и единственно $y \in V$, для которого $f(x, y) = 0$. Более того, получающаяся функция $x \mapsto y$ также гладка.

Мы докажем более общее утверждение. Именно, будем понимать x и y в уравнении $f(x, y) = 0$ не обязательно как числа, но как точ-

ки пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Такое обобщение влечет и другие изменения в формулировке. В самом деле, чтобы по данному $x = (x_1, \dots, x_m)$ определить n чисел $y_1, \dots, y_n$, одного уравнения недостаточно: вообще говоря, чтобы однозначно определить n неизвестных, требуется n уравнений. Поэтому в общем случае $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ является отображением из (открытого подмножества) $\mathbb{R}^{m+n}$ в $\mathbb{R}^n$, условие же $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ заменится на условие необращения в нуль некоторого якобиана. Вот окончательная формулировка.

Предложение 20.1 (теорема о неявной функции). Пусть $U \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r , записанное в координатах как

$$(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)).$$

Пусть $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ и $(a; b) \in U$, причем $f(a; b) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Если определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(p) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}(p) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}(p) \end{vmatrix} \quad (20.1)$$

отличен от нуля, то существуют открытое множество $W \subset \mathbb{R}^m$, содержащее точку $(a_1, \dots, a_m)$, и открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку $(b_1, \dots, b_n)$, обладающие тем свойством, что для всякого $x = (x_1, \dots, x_m) \in W$ существует и единственно $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, удовлетворяющее условию $f(x; y) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Наконец, отображение $g: W \rightarrow V$ ставящее в соответствие точке $x \in W$ то единственное $y \in V$, для которого $f(x; y) = (0, \dots, 0)$, принадлежит к классу C^r , как и отображение f .

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tilde{f}: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, заданное следующей формулой, в которой мы в некоторых местах для краткости пишем x вместо $(x_1, \dots, x_m)$ и y вместо $(y_1, \dots, y_n)$:

$$\tilde{f}: (x; y) \mapsto (x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x; y), \dots, \varphi_n(x; y)) = (x; f(x; y)).$$

Отображение $\tilde{f}$ принадлежит классу C^r на множестве U , а его якобиан в точке $(a; b)$ равен определителю (20.1) и тем самым отличен от нуля, так что $\tilde{f}'(a; b)$ является изоморфизмом. По теореме об обратной функции найдется такое открытое множество $U \ni (a; b)$, что $\tilde{f}$ индуцирует диффеоморфизм U_1 на $\tilde{f}(U_1)$. Уменьшая, если нужно, множество U ,

можно считать, что $U = O \times V$, где $O \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность точки a и $V \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность точки b ; очевидно, $f(U) \supset W \times \{(0, \dots, 0)\}$, где $W \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность точки a . Покажем, что открытые множества W и V обладают требуемыми свойствами.

Заметим, что $f(x; y) = (0, \dots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(x; y) = (x; 0, \dots, 0)$. Поскольку отображение $\tilde{f}$ взаимно однозначно на U , отсюда следует, что для всякого $x \in W$ существует не более одного $y \in V$, удовлетворяющего условию $f(x; y) = (0, \dots, 0)$. Поскольку $f(U)$ содержит $W \times \{(0, \dots, 0)\}$, для всякого $x \in W$ существует такой $y \in V$, что $f(x; y) = (0, \dots, 0)$, причем в силу вышесказанного этот y единствен. Стало быть, отображение $g: W \rightarrow V$, о котором идет речь в формулировке теоремы, построено.

Чтобы показать, что g принадлежит к классу C^r , обозначим через $i: W \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ отображение, заданное формулой $x \mapsto (x; (0, \dots, 0))$, а через $p: U \rightarrow V$ — проекцию на второй сомножитель. Поскольку $g = p \circ h \circ i$, где $h: \tilde{f}(U) \rightarrow U$ — диффеоморфизм класса C^r , обратный к $\tilde{f}$, и поскольку p и i бесконечно гладки, все доказано. $\square$

Теорема о неявной функции позволяет сформулировать понятие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$. Сделаем это.

Зафиксируем до конца лекции некоторое r (либо целое положительное число, либо символ ∞), и будем под словами «диффеоморфизм» или «гладкое отображение» понимать диффеоморфизм (гладкое отображение) класса C^r .

Предложение 20.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество и $k \leq n$ — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны.

(1) Для всякой точки $x \in X$ существует содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi: U \rightarrow V$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, обладающий тем свойством, что

$$\varphi(X \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V: y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

(2) Для всякой точки $x \in X$ существуют содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ и гладкие функции $f_1, \dots, f_{n-k}: U \rightarrow \mathbb{R}$, обладающие следующими свойствами:

- $X \cap U = \{p \in X: f_1(p) = \dots = f_{n-k}(p) = 0\}$;
- функции $f'_1(x), \dots, f'_{n-k}(x)$ линейно независимы для всех $x \in X \cap U$.

(3) Для всякой точки $x \in X$ существуют содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$, открытое подмножество $W \subset \mathbb{R}^k$ и взаимно однозначное гладкое отображение $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, обладающее тем свойством, что $\psi(W) = X \cap U$ и $\psi'(x)$ инъективно для всех $x \in U$.

Дословно то же определение можно дать, заменив $\mathbb{R}^n$ на произвольное открытое подмножество $T \subset \mathbb{R}^n$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Условие (2), очевидно, инвариантно относительно диффеоморфизма; согласно условию (1), пара $(U, X \cap U)$ диффеоморфна паре $(V, H \cap V)$, где $H \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство; эта последняя пара, очевидно, условию (2) удовлетворяет (с координатными функциями в качестве f_i). $\square$

(2) $\Rightarrow$ (3). Поскольку ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

равен $n - k$, один из ее $(n - k) \times (n - k)$ -миноров (не ограничивая общности можно считать, что образованный первыми $n - k$ столбцами) отличен от нуля. Пусть $x = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Тогда по теореме о неявной функции (теорема 20.1) существуют открытые подмножества $W \subset \mathbb{R}^k$ и $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ и гладкое отображение $\varphi: W \rightarrow V$, обладающие следующими свойствами: $W \ni (a_{n-k+1}, \dots, a_n)$, $V \ni (a_1, \dots, a_{n-k})$, $V \times W \subset U$, и, наконец $(w, v) \in (W \times V) \cap X$ тогда и только тогда, когда $w = \varphi(v)$. Теперь очевидно, что отображение $w \mapsto (w, \varphi(w))$ из W в $\mathbb{R}^n$ является искомым (причем в роли U из условия (3) выступает $V \times W$). $\square$

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть отображение $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ записывается в координатах формулой

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (\psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_k)).$$

Из условия следует, что один из $(k \times k)$ -миноров матрицы $(\partial \psi_i / \partial x_j)(x)$ отличен от нуля в точке $w = \psi^{-1}(x)$ (а стало быть, и в ее окрестности). Чтобы не утяжелять обозначения, предположим, что этот минор образован первыми k строками. Рассмотрим теперь отображение $\Psi: W \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное по формуле

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &\mapsto \\ &(\psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_k(x_1, \dots, x_k), \\ &\psi_{k+1}(x_1, \dots, x_k) + x_{k+1}, \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_k) + x_n). \end{aligned}$$

Его якобиан в точке $(w, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$ равен вышеуказанному $(k \times k)$ -минору и тем самым отличен от нуля. Следовательно, по теореме об обратной функции отображение Ψ является диффеоморфизмом на свой образ

в некоторой окрестности $V \ni w$; ясно, что

$$\Psi(\{(x_1, \dots, x_n) \in W : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}) = \Psi(V) \cap X. \quad \square$$

Определение 20.3. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее любому из эквивалентных условий (1)—(3), перечисленных в предложении 20.2, называется (*вложенным*) *k-мерным подмногообразием* в $\mathbb{R}^n$ (соответствующего класса гладкости).

С многообразиями можно делать более или менее все то же самое, что мы делали с открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$: можно рассматривать гладкие функции на многообразиях и гладкие отображения из одного многообразия в другое, можно эти отображения дифференцировать, и т. п. Теория при этом получается более интересная (по той простой причине, что многообразий гораздо больше, чем областей в $\mathbb{R}^n$), но соответствующие понятия надо правильно определить.

Определение 20.4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — вложенное k -мерное подмногообразие, и пусть $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, а $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ — диффеоморфизм на открытое множество $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, обладающий тем свойством, что $\tilde{\varphi}(X \cap \tilde{U}) = V$, где

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \in \tilde{V} : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$$

(как в пункте (1) предложения 20.2). Тогда открытое подмножество $U = \tilde{U} \cap X$ называется *координатной окрестностью* в многообразии X , а ограничение $\varphi = \tilde{\varphi}|_U: U \rightarrow V$ называется *локальной картой*, соответствующей этой окрестности.

Замечание 20.5. Из определения ясно, что каждая локальная карта $\varphi: U \rightarrow V$ является гомеоморфизмом.

Смысл локальных карт в том, что они задают на многообразиях системы координат; при этом в большинстве интересных случаев задать «глобальную» систему координат (то есть устроить так, чтобы $U = X$) не удастся: координаты можно ввести только локально, на открытых подмножествах, покрывающих в совокупности все многообразие.

Различные системы координат (иными словами, локальные карты) обладают следующим свойством согласованности.

Предложение 20.6. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерное подмногообразие, и пусть $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ и $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$ — две локальные карты. Если $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, то отображение

$$\varphi_{12}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом (открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$).

Доказательство. Пусть $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ имеют тот же смысл, что в определении 20.4. Поскольку отображения $\tilde{\varphi}_1: \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{V}_1$ и $\tilde{\varphi}_2: \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{V}_2$ являются диффеоморфизмами открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, отображение

$$\tilde{\varphi}_{12}: \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) \rightarrow \tilde{\varphi}_2(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2),$$

заданное формулой $x \mapsto \tilde{\varphi}_2(\tilde{\varphi}_1^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом, как и обратное к нему $\tilde{\varphi}_{21}$. Поскольку эти диффеоморфизмы переводят пересечение $s \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ в пересечение $s \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, их ограничения на эти пересечения также являются взаимно обратными диффеоморфизмами. $\square$

Предложение-определение 20.7. Пусть X и Y — многообразия, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Отображение f называется *гладким*, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий.

(1) Для всякой точки $x \in X$ существуют такие координатные окрестности $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ и локальные карты $\varphi: U \rightarrow V$ и $\varphi': U' \rightarrow V'$, что отображение $g = \varphi' \circ f|_{U \cap f^{-1}(U')} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}(U'))}$ является гладким (см. диаграмму):

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\ U & \hookrightarrow & U \cap f^{-1}(U') & \longrightarrow & U' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \hookrightarrow & \varphi(f^{-1}(U')) & \xrightarrow{g} & V'. \end{array}$$

(2) Для всякой точки $x \in X$ и *любых* координатных окрестностей $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ с локальными картами $\varphi: U \rightarrow V$ и $\varphi': U' \rightarrow V'$ отображение $\varphi' \circ f|_{U \cap f^{-1}(U')} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}(U'))}$ является гладким.

В частности, если $Y = \mathbb{R}$, получаем определение *гладкой функции* на многообразии X .

Доказательство получается непосредственно с использованием того, что замена координат гладка (предложение 20.6).

Если $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, то имеет смысл говорить о ранге производной отображения f в произвольной точке $x \in X$. Именно, рассмотрим произвольные такие коорди-

натные окрестности $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ с локальными картами $\varphi: U \rightarrow V$ и $\varphi': U' \rightarrow V'$; тогда можно говорить о ранге производной отображения $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ (в точке $\varphi(x)$), причем ясно, что этот ранг не зависит от выбора локальных карт: при другом выборе композиция $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ умножится слева и справа на диффеоморфизм открытых подмножеств в евклидовых пространствах, а такая операция на ранг повлиять не может.

Разумеется, было бы желательно иметь для случая многообразий не только корректное определение ранга отображения, но и определение производной гладкого отображения в точке x как линейного отображения некоторых векторных пространств. Такую теорию построить действительно можно; мы займемся ею в следующем семестре. Тогда же мы дадим и более удобное для работы определение многообразия.

В заключение же этой лекции приведем определение диффеоморфизма в контексте многообразий.

Определение 20.8. Отображение $f: X \rightarrow Y$ двух гладких многообразий называется *диффеоморфизмом*, если оно гладко, взаимно однозначно, и обратное к нему отображение $f^{-1}: X \rightarrow Y$ также гладко.

21. Теорема Арцела—Асколи и дифференциальные уравнения

Представим себе, что каждой точке $a \in \mathbb{R}^m$ сопоставлена прямая $\ell_a \subset \mathbb{R}^m$, проходящая через эту точку, и при этом ℓ_a непрерывно — или, еще лучше, гладко — зависит от a , что бы это ни значило. (Такой объект называется полем прямых на $\mathbb{R}^m$.) Спрашивается, существует ли гладкая кривая $C \subset \mathbb{R}^m$, обладающая тем свойством, что для всякой точки $a \in C$ прямая ℓ_a касается кривой C в этой точке? (Такая кривая называется интегральной кривой данного поля прямых.) Один из фундаментальных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений гласит, что при правильном уточнении формулировки ответ на этот вопрос всегда положителен. С уточнения формулировки мы и начнем.

Чтобы не отклоняться от традиционных обозначений, положим $m = n + 1$. Мы будем доказывать, что интегральная кривая существует локально — в окрестности данной точки. Далее, уж если ℓ_a зависит от a непрерывно (и тем более гладко), то для всякой точки a можно выбрать систему координат $(t, x_1, \dots, x_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ таким образом, что ни сама прямая ℓ_a , ни прямые, соответствующие близким к a точкам, не была параллельна гиперплоскости $\{t = 0\}$. Поэтому всякую пря-

Теорема 21.2 (Арцелá—Асколи). *Подмножество $S \subset C(X, V)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

- (1) *существует такое $M > 0$, что $\|f(x)\| \leq M$ для всех $f \in S$ и $x \in X$ («равномерная ограниченность»);*
- (2) *для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого $f \in S$ выполнено неравенство $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon$, как только $\rho(x_1, x_2) \leq \delta$ («равностепенная непрерывность»).*

Заметим, что всякое отображение $f \in C(X, V)$ автоматически равномерно непрерывно; смысл условия (2) в том, что δ можно выбрать не зависящим не только от x_1 и x_2 , но и от выбора $f \in S$.

Доказательство. Мы докажем только более трудную часть «тогда». Итак, предположим, что семейство $S \subset C(X, V)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно; нам надо доказать, что из данной последовательности $\{f_n \in S\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Лемма 21.3. *У последовательности $\{f_n\}$ найдется подпоследовательность, сходящаяся поточечно.*

Пусть лемма доказана, и пусть $\{g_m\}$ — подпоследовательность в последовательности $\{f_m\}$, обладающая тем свойством, что предел $g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x)$ существует для всякой точки $x \in X$. Заметим, что функция g (равномерно) непрерывна. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon$, как только $f \in S$ и $\rho(x_1, x_2) \leq \delta$. Если $\rho(x_1, x_2) \leq \delta$, то, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в неравенстве $\|g_m(x_1) - g_m(x_2)\| \leq \varepsilon$, получим, что $\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \varepsilon$. Этим доказана равномерная непрерывность функции g , а значит, и равностепенная непрерывность семейства $S \cup \{g\}$.

Покажем теперь, что на самом деле последовательность $\{g_m\}$ сходится к g равномерно. В самом деле, если это не так, то существуют число $\varepsilon > 0$, возрастающая последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел и последовательность точек $x_k \in X$ с тем свойством, что $\|g_{n_k}(x_k) - g(x_k)\| \geq \varepsilon$ для всех k . Поскольку X — компакт, из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Меняя соответствующим образом обозначения и переходя к подпоследовательности в $\{g_n\}$, можно считать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ и $\|g_k(x_k) - g(x_k)\| \geq \varepsilon$ для всех k . Ввиду равностепенной непрерывности семейства, состоящего из всех g_n и g , найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(x', x'') < \delta$ вытекает, что $\|g_k(x') - g_k(x'')\| < \varepsilon/3$ для всех k и $\|g(x') - g(x'')\| < \varepsilon/3$. Если теперь $\rho(x_k, x) < \delta$, и $\|g_k(x) - g(x)\| < \varepsilon/3$,

то еще и $\|g_k(x_k) - g_k(x)\| < \varepsilon/3$, и $\|g(x) - g(x_k)\| < \varepsilon/3$, откуда

$$\|g_k(x_k) - g(x_k)\| \leq \|g_k(x_k) - g_k(x)\| + \|g_k(x) - g(x)\| + \|g(x) - g(x_k)\| < < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

и получаем противоречие.

Остается доказать лемму 21.3. Проще всего она выводится из сформулированной, но не доказанной нами теоремы Тихонова (теорема 7.3). Именно, обозначим через B замкнутый шар радиуса M с центром в начале координат в V . Тогда множество *всех* отображений из X в B есть не что иное, как прямое произведение $\prod_{x \in X} B$ (по одному экзем-

пляру шара B для всякой точки $x \in X$); если наделить его топологией произведения, то легко видеть, что последовательность элементов этого произведения сходится в такой топологии тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность отображений сходится поточечно. Поскольку B компактно, произведение $\prod_{x \in X} B$ компактно по

теореме Тихонова, а значит и секвенциально компактно, так что из *произвольной* последовательности *произвольных* отображений можно выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность (равностепенная непрерывность, и вообще непрерывность элементов семейства S , в этом рассуждении вообще не используется).

Чтобы не ссылаться на недоказанные утверждения, приведем другое доказательство леммы 21.3. Напомним, что подмножество Y в топологическом пространстве X называется *плотным*, если $\bar{Y} = X$.

Лемма 21.4. *Всякое компактное метрическое пространство содержит не более чем счетное плотное подмножество.*

Доказательство леммы 21.4. Канторово множество C (представленное обычным образом как подмножество единичного отрезка) содержит счетное плотное подмножество C' , состоящее из конечных трюичных дробей, в записи которых не участвует цифра 1. Если X — данное пространство и $f: C \rightarrow X$ — существующее по теореме 7.6 непрерывное сюръективное отображение, то множество $f(C')$ плотно в X . $\square$

Итак, X содержит счетное плотное подмножество Z .

Лемма 21.5. *У последовательности $\{f_n\}$ найдется подпоследовательность, сходящаяся в каждой точке множества Z .*

Доказательство леммы 21.5. Перенумеруем все точки множества Z : $z_1, z_2, \dots$. Поскольку шар радиуса M в пространстве V компактен,

у последовательности $\{f_n\}$ есть подпоследовательность, сходящаяся в точке z_1 ; обозначим эту подпоследовательность $\{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, \dots\}$. Далее, у последовательности $\{f_{1n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть подпоследовательность, сходящаяся в точке z_2 . Продолжая по индукции, для каждого $k > 1$ построим последовательность отображений $\{f_{kn}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, сходящуюся в точке z_k и являющуюся подпоследовательностью в последовательность $\{f_{k-1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Остается заметить, что последовательность $\{f_{nn}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является (начиная с какого-то места) подпоследовательностью в каждой из $\{f_{km}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ и тем самым сходится в каждой из точек z_k . $\square$

Завершим доказательство леммы 21.3. По лемме 21.5 у $\{f_n\}$ есть подпоследовательность $\{g_k\}$, сходящаяся в каждой точке множества Z ; покажем, что она сходится и в каждой точке множества X . В самом деле, пусть $x \in X$; покажем, что последовательность $\{g_n(x)\}$ фундаментальна. Для этого зададимся числом $\varepsilon > 0$; в силу равностепенной непрерывности существует такое $\delta > 0$, что $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon/3$, как только $f \in S$, а $\rho(x', x'') < \delta$. Так как Z плотно в X , найдется $z \in Z$, для которого $\rho(x, z) < \delta$; так как последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_m(z) - f_n(z)\| < \varepsilon/3$, как только $m, n \geq N$. Теперь при $m, n \geq N$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_m(x) - f_n(x)\| &\leq \\ &\leq \|f_m(x) - f_m(z)\| + \|f_m(z) - f_n(z)\| + \|f_n(x) - f_n(z)\| < \\ &< 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и тем самым сходится. Доказательство закончено. $\square$

В качестве упражнения предлагаем читателю сформулировать и доказать обобщение теоремы Арцела—Асколи для случая, когда V заменено на произвольное полное метрическое пространство (какой вид примет условие равномерной ограниченности?).

Доказательство части (1) теоремы 21.1. Докажем, что для некоторого $t > t_0$ существует решение на интервале $[t_0; t)$ (для левой половины рассуждения аналогичны). Для этого выберем (замкнутый) отрезок $J \subset I$, содержащий t_0 , и замкнутый шар B_r радиуса r с центром в x_0 (относительно L^∞ -нормы), содержащийся в U . Пусть $t > t_0$, и пусть $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t$ — разбиение отрезка $[t_0; \tau]$. Будем называть ломаной Эйлера, соответствующей этому разбиению, непрерывное (кусочно-линейное) отображение $f: [t_0; t] \rightarrow U$, обладающее тем свойством, что $f(\tau_0) = x_0$ и $f(\tau) = f(\tau_i) + (\tau - \tau_i)v(\tau_i, f(\tau_i))$, как только $\tau \in [\tau_i; \tau_{i+1}]$.

Лемма 21.6. Пусть $M = \sup_{\substack{t \in J \\ x \in B_r}} \|v(t, x)\|$. Тогда при $0 < t - t_0 < r/M$ (u $[t_0; t] \subset J$) для всякого разбиения отрезка $[t_0; t]$ существует соответствующая ему ломаная Эйлера, образ которой содержится в B_r . Если $f: [t_0; t] \rightarrow U$ — такая ломаная Эйлера, то $\|f(u') - f(u'')\| \leq M|u' - u''|$ для любых $u', u'' \in [t_0; t]$.

Доказательство леммы. Ломаная Эйлера строится по индукции, начиная с τ_0 ; поскольку шар B_r — выпуклое множество, единственное, что надо проверить, — что все $f(\tau_i) = f(\tau_{i-1}) + v(\tau_i, f(\tau_{i-1}))$ лежат в B_r . По индукции получаем, что

$$\begin{aligned} \|f(\tau_i) - f(x_0)\| &= \|f(\tau_i) - f(\tau_0)\| \leq \sum \|f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})\| = \\ &= \sum |\tau_j - \tau_{j-1}| \cdot \|v(\tau_{j-1}, f(\tau_{j-1}))\| \leq M \sum |\tau_j - \tau_{j-1}| \leq M(t - t_0) < r. \end{aligned}$$

Второе утверждение очевидно, если u' и u'' содержатся в одном отрезке разбиения; в общем случае существует последовательность $u'' < u_1 < \dots < u_m < u''$, в которой всякие два соседних числа лежат в одном отрезке; из справедливости неравенства для каждой пары соседних чисел вытекает, что оно выполняется и для пары (u', u'') . $\square$

Лемма 21.7. Пусть $0 < t - t_0 < r/M$ и $[t_0; t] \subset J$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует ломаная Эйлера $f: [t_0; t] \rightarrow r/M$, обладающая тем свойством, что $\|f'(\tau) - v(\tau, f(\tau))\| \leq \varepsilon$ для всех τ , для которых производная существует.

Доказательство леммы. Если $\tau \in (\tau_j; \tau_{j+1})$, то

$$f'(\tau) - v(\tau, f(\tau)) = v(\tau_j, f(\tau_j)) - v(\tau, f(\tau)),$$

причем $\|f(\tau_j) - f(\tau)\| = |\tau - \tau_j| \cdot \|v(\tau_j, f(\tau_j))\| \leq M|\tau - \tau_j|$. Ввиду компактности произведения $J \times B_r$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\tau' - \tau''| < \delta$ и $\|u' - u''\| < M\delta$ имеем $\|v(\tau', u') - v(\tau'', u'')\| < \varepsilon$. Всякая ломаная Эйлера, соответствующая разбиению $[t_0; t]$ на отрезки длиной $< \delta$, будет искомой. $\square$

Всякую ломаную Эйлера, удовлетворяющую условиям этой леммы, будем называть ε -ломаной.

Обозначим теперь через S семейство всевозможных 1-ломанных $f: [t_0; t] \rightarrow B_r$. Из второго утверждения леммы 21.6 следует, что это семейство равномерно непрерывно в $C(X, \mathbb{R}^n)$, а его равномерная ограниченность очевидна; стало быть, оно относительно компактно. Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и f_n — какая-нибудь ε_n -ломаная. Из последовательности $\{f_n\}$

можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность; переобозначая, получаем последовательность отображений $f_n: [t_0; t] \rightarrow B_r$, равномерно сходящуюся к отображению $f: [t_0; t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, причем f_n является ε_n -ломаной для всякого n и $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Покажем, что f — искомое решение. В самом деле, ввиду формулы Ньютона—Лейбница для этого достаточно показать, что $f(u) = f(t_0) + \int_{t_0}^u v(\tau, f(\tau)) d\tau$. Заметим, что

$$\left\| f_n(u) - x_0 - \int_{t_0}^u v(\tau, f_n(\tau)) d\tau \right\| = \left\| \int_{t_0}^u f'_n(u) - v(\tau, f_n(\tau)) d\tau \right\| \leq \varepsilon_n(u - t_0).$$

Устремляя n к бесконечности и переходя в левой части к пределу под знаком интеграла (что законно, например, ввиду теоремы Лебега об ограниченной сходимости), получаем искомое равенство. $\square$

Доказательство части (2) теоремы 21.1. Пусть $B \subset U$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, содержащий точку x_0 . Достаточно доказать, что любые два решения φ_1, φ_2 с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ совпадают на некотором отрезке $J = [t_0, t]$, для которого $\varphi_i(J) \subset B$ (для левой половины рассуждения аналогичны).

Так как v принадлежит к классу C^1 , все частные производные ее компонент ограничены на выпуклом компактном множестве $J \times B$. Следовательно (см. задачу 2.41), существует такая константа $K > 0$, что $\|v(\tau, x_1) - v(\tau, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$ для всех $\tau \in I$ и $x_1, x_2 \in B$. Положим $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Из равенств $\varphi_i(u) = x_0 + \int_{t_0}^u v(\tau, \varphi_i(\tau)) d\tau$ вытекает, что

$$\|\varphi'(\tau)\| = \|\|v(\tau, \varphi_1(\tau)) - v(\tau, \varphi_2(\tau))\| \leq K\|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\| = K\|\varphi(\tau)\|. \quad (21.2)$$

Теперь для всякого $\varepsilon > 0$ обозначим через u самую левую точку отрезка $[t_0; t]$, для которой $\|\varphi(u)\| \geq \varepsilon$. Из неравенства (21.2) вытекает, что

$$\varepsilon = \|\varphi(u)\| \leq \int_{t_0}^u \|\varphi'(\tau)\| d\tau \leq K\varepsilon(u - t_0),$$

откуда $|u - t_0| \geq 1/K$. Поскольку правая часть от ε не зависит, получаем, что при $t_0 \leq \tau < t_0 + 1/K$ вектор $\varphi(\tau)$ обязан быть нулевым, откуда и $\varphi(u) = 0$, то есть φ — тождественный ноль. $\square$

Если правая часть дифференциального уравнения предполагается только непрерывной, то утверждение о единственности может нарушаться. Например, если (при $n = 1$) уравнение имеет вид $x' = 2\sqrt{|x|}$ (правая часть от t не зависит), то при начальных условиях $t = t_0, x = 0$ ему удовлетворяют как функция $x(t) = \text{sign}(t - t_0) \cdot (t - t_0)^2$, так и функция, тождественно равная нулю.

22. Замена переменных в интеграле

Эта лекция посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 22.1 (о замене переменной). Пусть $g: U \rightarrow V = g(U)$ — диффеоморфизм (класса C^1) открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ и $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая функция. Тогда

$$\int_V f \, d\mu_n = \int_U (f \circ g) |J(g)| \, d\mu_n, \quad (22.1)$$

где $J(g)$ — якобиан диффеоморфизма g , а μ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Переходя к доказательству, начнем с малого.

Во-первых, условимся о терминологии. Будем называть *параллелепипедом* подмножество $I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, где $I_1, \dots, I_n$ — ограниченные интервалы в $\mathbb{R}$ (с произвольным образом включенными или не включенными концами). Из теоремы Фубини, примененной к характеристической функции параллелепипеда, ясно, что $\mu_n(\Pi) = \mu_1(I_1) \dots \mu_1(I_n)$: мера параллелепипеда равна его объему. Параллелепипед с равными ребрами будем называть *кубом*.

Предложение 22.2 (геометрический смысл определителя). Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный автоморфизм и $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Тогда $A(E)$ измеримо и $\mu_n(A(E)) = |\det A| \mu_n(E)$.

Доказательство. Начнем с леммы.

Лемма 22.3. Всякое открытое подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ можно представить в виде (не более чем) счетного объединения попарно непересекающихся кубов.

Доказательство. Всюду в этом доказательстве под кубом будем понимать произведение интервалов (равной длины) вида $[a_i; b_i]$.

Сначала рассмотрим всевозможные кубы с ребром единица и с целыми координатами всех вершин и отберем из них те, что содержатся в U . Затем рассмотрим всевозможные кубы с ребром $1/2$ и полуцелыми координатами всех вершин и отберем из них те, что не содержатся ни в одном из уже отобранных и содержатся в U ; затем отберем кубы с ребром $1/2^2$ и координатами вершин вида $m/2^2$, где $m \in \mathbb{Z}$, не содержащиеся в ранее отобранных и содержащиеся в U , и т. д. В итоге получится счетное семейство кубов; обозначим их объединение через V и покажем, что $U = V$. В самом деле, если $x \in U \setminus V$, то ввиду открытости U точка x содержится в каком-то кубе Q с ребром $1/2^k$ и координатами вершин вида $m/2^k$, не включенном в V ; выбирая наименьшее k , для которого существует такой куб, получаем противоречие. $\square$

Лемма 22.4. *Если для линейного автоморфизма $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует такое число c , что $\mu(A(\Pi)) = c\mu(\Pi)$ для всякого параллелепипеда Π , то $\mu(A(E)) = c\mu(E)$ для всякого измеримого E .*

Доказательство. Из леммы 22.3 следует, что $\mu(A(U)) = c\mu(U)$ для всякого открытого U ; следовательно, если обозначить через $\bar{\mu}$ внешнюю меру, то $\bar{\mu}(A(X)) = c\bar{\mu}(X)$ для всякого множества X ; в частности, множества меры нуль переводятся в множества меры нуль. Поскольку A — гомеоморфизм, борелевские множества переводятся в борелевские, так что из предложения 16.14 теперь вытекает, что измеримые множества переводятся в измеримые; применяя к измеримым множествам доказанное выше утверждение о внешней мере, получаем искомое. $\square$

Переходя к доказательству предложения, заметим, что если оно верно для операторов $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то оно верно и для их композиции. Вспомним теперь, что всякая невырожденная $(n \times n)$ -матрица над полем представляется в виде произведения матриц следующих видов:

- (1) диагональные матрицы;
- (2) матрицы операторов, соответствующих перестановке координат;
- (3) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание лемму 22.4, получаем, что предложение достаточно доказать для отображений вида (1), (2) или (3) в случае, когда $E = \Pi$ — параллелепипед.

Для отображений типа (1) и (2), переводящих параллелепипеды в параллелепипеды, предложение очевидно. В случае (3) заметим, что, если обозначать через $T_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ параллельный перенос на $b \in \mathbb{R}$, то по теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} \mu_n(A\Pi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\mu_{n-2}(a) \int_{\mathbb{R}^2} \mu_2(\{a\} \times \mathbb{R}^2 \cap A(\Pi)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\mu_{n-2}(a) \int_{I_2} d\mu_2(y) \mu_1(T_{cy}(I_1 \times \{y\})) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} d\mu_{n-2}(a) \int_{I_2} d\mu_2(y) \mu_1(I_1) = \mu_n(\Pi) \end{aligned}$$

(через T_a обозначен сдвиг на $a \in \mathbb{R}$). Поскольку в случае (3) имеем $\det A = 1$, все доказано. $\square$

Теперь докажем ключевой факт.

Предложение 22.5. Пусть $g: U \rightarrow V = g(U)$ — диффеоморфизм (класса C^1) открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ и $Q \subset U$ — куб. Тогда $\mu_n(g(Q)) = \int_Q |\det g'(x)| d\mu_n(x)$.

Идея доказательства этого предложения очень проста. Именно, разобьем куб Q на много одинаковых маленьких кубиков Q_i и выберем в каждом из них по точке ξ_i . Тогда, поскольку ограничение g на Q_i близко к линейному отображению $h'(\xi_i)$, из предложения 22.2 следует, что

$$\mu_n(g(Q)) = \sum \mu_n(g(Q_i)) \approx \sum |\det h'(\xi_i)| \mu_n(Q_i) \approx \int_Q |\det g'(x)| d\mu_n(x),$$

и «ясно», что если ребро Q_i стремится к нулю, то погрешности в приближенных равенствах стремятся к нулю. Перейдем к аккуратному доказательству.

Условимся меру Лебега в $\mathbb{R}^n$ обозначать просто μ . Далее, через $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову норму в $\mathbb{R}^n$ (корень из суммы квадратов координат). Нормы линейных операторов также будут вычисляться относительно этой нормы.

Сразу же заметим, что предложение 22.5 достаточно доказать для случая, когда $\bar{Q} \subset U$. В самом деле, если $Q \subset U$ — произвольный куб, то $\text{Int } Q$ представляется в виде объединения монотонно возрастающей последовательности замкнутых кубов, лежащих в U ; из справедливости предложения для каждого из этих кубов и теоремы Бешпо Леви вытекает, что предложение верно и для Q . Итак, всюду далее считаем, что $\bar{Q} \subset U$.

Лемма 22.6. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее следующим свойством. Если $M \subset Q$ — куб с ребром, меньшим δ , и с центром c , то

$$\left| \frac{|\det g'(c)| \mu(M)}{\mu(g(M))} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Вывод предложения 22.5 из леммы. Пусть k — натуральное число. Разобьем куб Q на n^k непересекающихся кубиков M_i одинакового размера; пусть c_i — центр куба M_i . Если для данного $\varepsilon > 0$ имеем $1/k < \delta$, где δ — как в лемме, то

$$\begin{aligned} \left| \mu(g(Q)) - \sum |\det g'(c_i)| \mu(M_i) \right| &\leq \sum |\mu(g(M_i)) - |\det g'(c_i)| \mu(M_i)| \leq \\ &\leq \sum \varepsilon \mu(M_i) = \varepsilon \mu(Q). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mu(g(Q)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k^n} |\det g'(c_i)| \mu(M_i);$$

с другой стороны, поскольку функция $x \mapsto |\det f'(x)|$ равномерно непрерывна на Q , предел в правой части равен $\int_Q |\det f'(x)| d\mu(x)$ (скажем, по теореме Лебега об ограниченной сходимости). $\square$

Остается доказать лемму 22.6. Для этого потребуются известная аккуратность. Чтобы не прерывать нить изложения, начнем еще с одной леммы.

Лемма 22.7. Пусть $g: U \rightarrow V = g(U)$ — гомеоморфизм открытых множеств в R^n , и пусть M — куб с центром c и ребром a , для которого $\bar{M} \subset U$; обозначим через ∂M границу куба. Предположим, что $g(c) = c$ и для всех $x \in M$ выполнено неравенство $\|g(x) - x\| < \tau$, где $\tau < a/2$. Тогда

$$M' \subset g(\text{Int}(M)) \subset g(\bar{M}) \subset M'',$$

где M' (соответственно M'') — открытый куб с центром c и ребром $c - 2\tau$ (соответственно $c + 2\tau$).

Доказательство. Включение $g(\bar{M}) \subset M''$ очевидно; для доказательства второго включения заметим, что $g(\text{Int}(M))$ — открытое множество (так как g — гомеоморфизм), $g(\bar{M})$ — замкнутое множество (ввиду компактности) и $g(\partial M) \cap M' = \emptyset$ (так как ввиду условия все точки из M' находятся слишком далеко от границы). Следовательно,

$$M' = (M' \cap g(\text{Int}(M))) \sqcup (M' \setminus g(\text{Int}(M))) = (M' \cap g(\text{Int}(M))) \sqcup (M' \setminus g(\bar{M})),$$

причем в правой части оба множества открыты. Так как M' связно, одно из этих множеств пусто, а другое совпадает с M' ; поскольку $c = g(c) \in g(\text{Int}(M))$, получаем, что $M' = M' \cap g(\text{Int}(M))$. $\square$

Завершение доказательства леммы 22.6. Из того, что диффеоморфизм g гладок класса C^1 , вытекает существование такой константы A , что $\|(f'(x))^{-1}\| \leq A$ для всех $x \in Q$. Кроме того, из формулы Тейлора 18.2 и компактности Q вытекает существование функции $\eta: [0; \delta_0) \rightarrow [0; +\infty)$ (для некоторого $\delta_0 > 0$), обладающей тем свойством, что $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$ и $\|g(x+h) - g(x) - g'(x)h\| \leq \eta(\|h\|)\|h\|$, как только $x \in Q$ и $\|h\| \leq \delta_0$.

Зададимся теперь числом $\varepsilon > 0$, и пусть $c \in Q$. Рассмотрим отображение $\tilde{g}: x \mapsto c + (f'(c))^{-1}(f(x) - f(c))$.

Ясно, что $g(c) = c$, $\tilde{g}'(c) = \text{Id}$ и $\|\tilde{g}(c + h) - c - h\| \leq A\eta(\|h\|)\|h\|$, как только $\|h\|$ достаточно мало. Кроме того, из предложения 22.2 следует, что

$$\mu(g(M))/(|\det g'(c)|\mu(M)) = \mu(\tilde{g}(M))/\mu(M).$$

Существует такое $\delta_1 > 0$, что при $0 < \tau/a \leq \delta_1$ выполнены неравенства

$$\left| \left(\frac{a \pm 2\tau}{a} \right)^n - 1 \right| < \varepsilon. \quad (22.2)$$

Пусть c — центр куба M с ребром a , содержащегося в Q . Если $\eta(a\sqrt{n}) < \delta_1 a/A$, то из леммы 22.7 (в которой надо положить $g = \tilde{g}$ и $\tau = \delta_1 a$) вытекает, что $\tilde{g}(M)$ заключен между кубами с ребром $a(1 + 2\delta_1)$ и $a(1 - 2\delta_1)$ и центром c . Теперь из неравенства (22.2) следует, что

$$\mu(g(M))/(|\det g'(c)|\mu(M)) = \mu(\tilde{g}(M))/\mu(M) < \varepsilon.$$

Стало быть, лемма 22.6 доказана, а с ней и предложение 22.5. $\square$

Дальнейшее уже просто.

Предложение 22.8. *Предложение 22.5 остается верным, если под Q понимать произвольное измеримое подмножество в U .*

Доказательство. Ввиду леммы 22.3 предложение 22.5 распространяется с кубов на произвольные открытые множества. Далее, поскольку всякое компактное $K \subset U$ представляется в виде пересечения убывающего семейства открытых подмножеств в U (см. первый шаг в доказательстве теоремы 16.15), предложение 22.5 верно и в случае, когда $Q \subset U$ — произвольное компактное подмножество. Если $E \subset U$ — произвольное ограниченное измеримое подмножество, то по теореме 16.15 существуют возрастающая последовательность компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \subset E$ и убывающая последовательность открытых подмножеств $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots \supset E$, для которых $\mu(U_j \setminus K_j) \leq 1/j$ при всех j . Отсюда и из теоремы об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(g(U_j \setminus K_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{U_j \setminus K_j} |\det(g'(x))| d\mu(x) = 0,$$

так что множество $g(E)$ также измеримо и

$$\mu(g(E)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(g(U_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{U_j} |\det(g'(x))| d\mu(x) = \int_E |\det(g'(x))| d\mu(x),$$

откуда для E предложение также выполнено. Выполнимость предложения для неограниченных измеримых множеств получится, если представить такое множество в виде счетного дизъюнктного объединения ограниченных. $\square$

Из доказанного предложения вытекает, что теорема 22.1 верна для простых функций; отсюда стандартным рассуждением с использованием теоремы Беппо Леви получается, что она верна для произвольных положительных измеримых функций, а значит — и для произвольных суммируемых функций.

23. Теорема Сарда

Пусть $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение. Что можно сказать о его слоях $f^{-1}(y) \subset \mathbb{R}^m$ для произвольного $y \in \mathbb{R}^n$?

При такой постановке ответ прост и безрадостен: помимо того, что эти слои обязаны быть замкнутыми подмножествами в $\mathbb{R}^m$, ничего сказать нельзя, так как *всякое* замкнутое множество является множеством нулей некоторой бесконечно гладкой функции:

Предложение 23.1. *Для всякого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ существует C^∞ -функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $\varphi(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in F$.*

Доказательство. Начнем с построения так называемых колоколообразных функций (они пригодятся нам и в дальнейшем). Как известно, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

является C^∞ -гладкой на $\mathbb{R}$. Для всякого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $\psi_0(x) = f(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)$. Тогда $\psi_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^∞ , принимающая только неотрицательные значения, положительная всюду на внутренности единичного шара с центром в начале координат и равная нулю в остальных точках. Если $B_r(a)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке a , то функция $\psi(x) = \psi_0(r^{-1}(x - a))$ — также неотрицательная функция класса C^∞ , положительная на шаре $B_r(a)$ и равная нулю вне его; будем называть всякую такую функцию колоколообразной функцией для этого шара.

Заметим теперь, что открытое множество $\mathbb{R}^n \setminus F$ представляется в виде счетного объединения $\mathbb{R}^n \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ открытых шаров. Для ка-

жного шара B_j можно выбрать соответствующую ему колоколообразную функцию ψ_j , обладающую следующим свойством:

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq j}} |D^\alpha \psi_j(x)| \leq \frac{1}{2^j} \quad (23.1)$$

(в самом деле, поскольку (23.1) задает условия только на конечное число функций, для этого достаточно взять произвольную колоколообразную функцию для B_j и умножить ее на подходящую положительную константу).

Положим теперь $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)$. Ввиду (23.1) ряд в правой части равномерно сходится, так что φ — неотрицательная функция, множество нулей которой, очевидно, совпадает с F . Осталось показать, что она бесконечно дифференцируема.

Это доказывается с помощью следующей леммы о функциях одного переменного.

Лемма 23.2. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций класса C^1 на интервале $(a; b) \subset \mathbb{R}$; предположим, что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f , а последовательность $\{f'_n\}$ равномерно сходится к функции $\tilde{f}$. Тогда f — также функция класса C^1 , причем $f' = \tilde{f}$.

Доказательство леммы. Ввиду равномерной сходимости функции f и $\tilde{f}$ непрерывны. Зафиксируем точку $x_0 \in (a; b)$; по формуле Ньютона—Лейбница достаточно проверить, что

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \tilde{f}(t) dt$$

для всех $x \in (a; b)$; это же равенство вытекает из того, что

$$\int_{x_0}^x \tilde{f}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

ввиду равномерной сходимости, вкупе с очевидным равенством $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$. $\square$

Для доказательства бесконечной дифференцируемости функции φ достаточно установить, что все ее частные производные существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n$; ввиду леммы это доказывается индукцией по порядку производной, так как ввиду (23.1) все ряды вида $\sum D^\alpha \psi_j$ равномерно сходятся. $\square$

(Заметим в скобках, что с аналитическими отображениями дело обстоит лучше: их слой уже не произвольны и поддаются изучению. Мы, однако же, занимаемся анализом гладким.)

Потерпев фиаско в исследовании произвольных слоев, попробуем все же сказать что-нибудь позитивное. Именно, пусть для всех $x \in f^{-1}(y)$ ранг производной $f'(x)$ равен n . Тогда из предложения 20.2 следует, что $f^{-1}(y)$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^m$, и это множество не произвольное, а очень хорошее. Таким образом, есть точки, слой над которыми изучать можно. Для таких точек существует специальный термин.

Определение 23.3. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое подмножество. Точка $y \in \mathbb{R}^n$ называется *критическим значением отображения f* , если существует точка $x \in f^{-1}(y)$, для которой $\text{rank } f'(x) < n$. При этом точка x , для которой $\text{rank } f'(x) < n$, называется *критической точкой* отображения f .

Точка $y \in \mathbb{R}^n$ называется *регулярным значением отображения f* , если она не является критическим значением.

Два замечания к этому определению.

1. Если $y \notin f(U)$, то точка y автоматически является регулярным значением (хотя и не является значением отображения f !).

2. Определение не исключает случая $m < n$. В этом случае всякое значение отображения f является критическим.

В силу обсуждения перед определением 23.3, прообраз всякого регулярного значения является (если он непуст) гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^m$. Основной результат этой лекции утверждает, что если отображение f достаточно гладко, то регулярных значений у него очень много.

Теорема 23.4 (теорема Сарда). Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое подмножество, а $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r , где $r > \max(m - n, 0)$. Тогда множество критических значений отображения f имеет меру нуль.

Мы докажем теорему Сарда при упрощающем предположении, считая, что f бесконечно дифференцируемо.

Начнем с простого случая $m \leq n$; для него мы докажем теорему Сарда в полном объеме.

Предложение 23.5. Теорема 23.4 верна при $m \leq n$.

Доказательство. При $m \leq n$ теорема гласит, что множество критических значений отображения f имеет меру нуль, как только f является C^1 -гладким.

Пусть сначала $m = n$. Достаточно доказать, что меру нуль имеет множество критических значений ограничения $f|_Q$ для всякого замкнутого куба $Q \subset U$. Зафиксируем такой куб; пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$, где $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функции класса C^1 на U . Из формулы Тейлора, примененной ко всем f_i , следует, что существует такая возрастающая функция $\eta: [0; \tau) \rightarrow [0; +\infty)$ (для некоторого $\tau > 0$), обладающая свойством $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$, что

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| \leq \eta(\|h\|)\|h\|, \quad (23.2)$$

как только $x \in Q$ и $\|h\| < \tau$ (под нормой здесь и ниже понимаем обычную евклидову норму). Кроме того, из той же формулы Тейлора вытекает существование константы C с тем свойством, что $\|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\|$, как только $x, x' \in Q$ и $\|x - x'\|$ достаточно мало; так как куб — выпуклая фигура, отсюда следует, что $\|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\|$ для любых $x, x' \in Q$ (соедините x и x' отрезком).

Пусть теперь $R = \{x \in Q: \text{rank } f'(x) < n\}$.

Лемма 23.6. Пусть $E \subset U$ — подмножество, диаметр которого не превосходит $\varepsilon > 0$. Если $E \cap R \neq \emptyset$, то $\bar{\mu}(f(E)) \leq 2^n C^{n-1} \varepsilon^n \eta(\varepsilon)$ (в левой части стоит внешняя мера).

Доказательство леммы. Пусть $x \in E \cap R$; обозначим через L аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, проходящее через $f(x)$ и параллельное векторному подпространству $f'(x)(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$. По условию $\dim L \leq n-1$; если неравенство строгое, дополним L произвольным образом до гиперплоскости, содержащей $f(x)$, и будем далее обозначать через L эту гиперплоскость. Из неравенства (23.2) следует, что для всякой $x' \in E$ точка $f(x')$ отстоит от гиперплоскости L не более чем на $\varepsilon \eta(\varepsilon)$; кроме того, из неравенства $\|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\|$ следует, что для всякого $x' \in E$ имеем $\|f(x) - f(x')\| \leq C\varepsilon$; стало быть, проекция $f(x')$ на гиперплоскость L также отстоит от $f(x)$ не более чем на $C\varepsilon$. Тем самым $f(E)$ содержится в прямоугольном параллелепипеде с центром в $f(x)$, у которого $n-1$ ребер параллельны L и имеют длину $2C\varepsilon$, а последнее ребро, ортогональное к L , имеет длину $2\varepsilon \eta(\varepsilon)$. Внешняя мера $\mu(f(E))$ не превосходит объема этого параллелепипеда. $\square$

Теперь для произвольного натурального $k > 1$ разобьем куб Q на k^n кубиков с ребром d/k , где d — ребро куба Q . Если какой-то из этих кубиков имеет непустое пересечение с R , то, согласно лемме, мера его образа не превосходит $2^n C^{n-1} (d\sqrt{n}/k)^n \eta(d\sqrt{n}/k)$. Поскольку общее ко-

личество таких кубиков не превосходит k^n , имеем

$$\mu(f(R)) \leq \underbrace{2^n C^{n-1} (d\sqrt{n})^n}_{\text{const}} \cdot \eta(d\sqrt{n}/k);$$

так как правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, имеем $\mu(f(R)) = 0$, и теорема Сарда для случая $m = n$ доказана.

Если $m < n$, то теорема равносильна утверждению, что $\mu(f(U)) = 0$; это сразу следует из уже доказанного и того факта, что $f(U)$ совпадает с множеством критических значений отображения $f \circ \pi: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где π — проекция на первый сомножитель. $\square$

Предложение 23.7. *Теорема 23.4 верна, если $m > n$ и f бесконечно гладка.*

Доказательство. Начнем с простой леммы, с помощью которой мы установим, что некоторые интересующие нас множества измеримы.

Лемма 23.8. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — подмножество, представимое в виде разности двух замкнутых множеств (такие подмножества называют «локально замкнутыми») и $f: E \rightarrow X$ — непрерывное отображение в хаусдорфово пространство. Тогда $f(E)$ — борелевское подмножество в X .*

Доказательство леммы. Можно считать, что $E = F \setminus G$, где F и G замкнуты и $G \subset F$. Поскольку F , очевидно, представимо в виде счетного объединения компактных подмножеств, можно считать, что F и G компактны. Далее, имеем $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где все U_i открыты (см. дока-

зательство теоремы 16.15). Поэтому $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F \setminus U_i)$, т. е. E — объединение счетного семейства компактных множеств; следовательно, этим же свойством обладает и $f(E)$, а поскольку компактные подмножества в X замкнуты, множество $f(E)$ является борелевским. $\square$

Переходя к доказательству предложения, проведем индукцию по m (базу индукции обеспечивает предложение 23.5).

Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$, и пусть $R = R_0 = \{x \in U: \text{rank } f'(x) < n\}$. Нам надо доказать, что $\mu(f(R)) = 0$. Обозначим через $R_k \subset R$ подмножество, состоящее из тех точек $x \in R$, в которых все частные производные порядка $\leq k$ от всех функций f_i обращаются в нуль. Достаточно доказать следующие утверждения:

- (1) $\mu(f(R \setminus R_1)) = 0$;
- (2) $\mu(f(R_k \setminus R_{k+1})) = 0$ при всех $k > 0$;
- (3) $\mu(f(R_k)) = 0$, если $k \geq m/n$.

Сразу же заметим, что все R_k замкнуты, так что ввиду леммы 23.8 все множества вида $f(R_j)$ и $f(R_j \setminus R_{j+1})$ измеримы.

Докажем утверждение (1). Нам достаточно проверить, что у всякой точки $x \in R \setminus R_1$ существует такая окрестность V , что $\mu(f(R \cap V)) = 0$. Пусть теперь $x \in R \setminus R_1$; тогда $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq 0$ для каких-то i и j . Рассмотрим отображение $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, действующее по формуле

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, f_i(x_1, \dots, x_m), x_{j+1}, \dots, x_m);$$

согласно теореме об обратной функции, существует такая окрестность $V \ni x$, что ограничение $g|_V$ является C^∞ -диффеоморфизмом на свой образ V_1 . Критические значения отображения $\tilde{f} = f|_V \circ g|_{V_1}^{-1}$ — такие же, как у отображения $f|_V$. Теперь заметим, что $\tilde{f}$ действует по правилу

$$(x_1, \dots, x_m) = x \mapsto (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_{i-1}(x), x_j, \tilde{f}_{i+1}(x), \dots, f_n(x). \quad (23.3)$$

Поэтому $\tilde{f}$ переводит пересечение $H_c = V_1 \cap \{x_j = c\}$ в гиперплоскость $L_c = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n: y_i = c\}$, причем из (23.3) явствует, что $y \in L_c$ является критическим значением для $\tilde{f}$ тогда и только тогда, когда y является критическим значением для отображения $\tilde{f}|_{H_c}: H_c \rightarrow L_c$. Согласно предположению индукции, множество критических значений каждого из $\tilde{f}|_{H_c}$ имеет меру нуль в L_c ; стало быть, по теореме Фубини множество критических значений $\tilde{f}$ имеет меру нуль, а это множество совпадает, как мы уже отмечали, с $f(R \cap V)$.

Докажем утверждение (2). По-прежнему достаточно проверить, что у всякой точки $x \in R_k \setminus R_{k+1}$ существует такая окрестность V , что $\mu(f(R_k \cap V)) = 0$. Пусть теперь $x \in R \setminus R_1$; тогда существуют мультииндекс α , $|\alpha| = k$, и индексы i и j , для которых $(\partial D_\alpha f_i / \partial x_j)(x) \neq 0$. Рассмотрим отображение $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, действующее по формуле

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, D_\alpha f_i(x_1, \dots, x_m), x_{j+1}, \dots, x_m);$$

согласно теореме об обратной функции, существует такая окрестность $V \ni x$, что ограничение $g|_V$ является C^∞ -диффеоморфизмом на свой образ V_1 . Критические значения отображения $\tilde{f} = f|_V \circ g|_{V_1}^{-1}$ — такие же, как у отображения $f|_V$. Заметим теперь, что условие обращения в нуль в точке x всех частных производных порядка $\leq k$ у отображения f класса C^k (и тем более класса C^∞) равносильно, ввиду формулы Тейлора, тому, что $\|f(x+h) - f(x)\| = o(\|h\|^k)$. Это последнее условие, очевидно, сохраняется при композиции с диффеоморфизмом. Поэтому у отображения $\tilde{f} = f|_V \circ g|_{V_1}^{-1}$ в каждой точке $x' \in g(R_k \cap V)$ все частные производные порядка $\leq k$ обращаются в нуль. С другой стороны,

из определения множества R_k следует, что $f(R_k \cap V) \subset V_1 \cap \{x_j = 0\}$. Стало быть, множество $g(R_k \cap V)$ содержится в множестве критических точек отображения $\tilde{f}|_{V_1 \cap \{x_j=0\}}$. По предположению индукции имеем $\mu(\tilde{f}(g(R_k \cap V))) = 0$, так что $\mu(f(R_k \cap V)) = 0$.

Докажем утверждение (3). Будем действовать так же, как в доказательстве предложения 23.5. Именно, пусть $k \geq m/n$. Достаточно показать, что $\mu(f(R_k \cap Q)) = 0$ для всякого замкнутого куба $Q \subset U$. Из формулы Тейлора следует, что существует такая возрастающая функция $\eta: [0; \tau) \rightarrow [0; +\infty)$ (для некоторого $\tau > 0$), обладающая свойством $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$, что

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \eta(\|h\|)\|h\|^k, \quad (23.4)$$

как только $x \in Q \cap R_k$ и $\|h\| < \tau$ (напоминаем, что норма евклидова).

Следовательно, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно такое утверждение: если $E \subset Q$ — множество диаметра $\leq \varepsilon$, для которого $E \cap R_k \neq \emptyset$, то $f(E)$ содержится в кубе с ребром $2\eta(\varepsilon)\varepsilon^k$. Если теперь разбить куб Q на r^m кубиков с ребром d/r , где d — ребро куба Q , то мера образа такого кубика, пересекающегося с R_k , не превосходит $2^n \eta(d\sqrt{m}/r)(d\sqrt{m})^{kn}/r^{kn}$. Поскольку таких кубиков не более чем r^m штук, получаем, что

$$\mu(f(R_k)) \leq \underbrace{2^n (d\sqrt{m})^{kn}}_{\text{const}} \cdot \eta(d\sqrt{m}/r) r^{m-kn}.$$

Поскольку $m - kn \leq 0$, то устремляя r к бесконечности, получаем, что $\mu(f(R_k)) = 0$. $\square$

Стоит разобраться, почему приведенное рассуждение не дает доказательства теоремы Сарда в полной общности. Легко видеть, что доказательство утверждения (1) ($\mu(f(R \setminus R_1)) = 0$) проходит и в случае, когда f — всего лишь отображение класса C^s , где $s > m - n$, а также что по-прежнему верно утверждение (3) ($\mu(f(R_s)) = 0$, так как $m - n + 1 \geq m/n$ при $m > n$). Трудности возникают только с утверждением (2), гласящим, что $\mu(f(R_k \setminus R_{k+1})) = 0$: если k велико, то диффеоморфизм, «выпрямляющий» гиперповерхность $D^\alpha f_i = 0$, имеет слишком низкий класс гладкости, вследствие чего не удается опереться на теорему Сарда для меньшей размерности.

24. Пример Уитни

Для справедливости теоремы Сарда существенно, чтобы отображение было не просто гладким, но имело достаточно много непре-

ривных производных: оказывается, что условие C^r -гладкости, где $r > \max(m - n, 0)$ (для отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$) ослабить уже нельзя. Именно, Х. Уитни для каждого $n > 1$ построил пример C^{n-1} -функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, у которой множество критических значений содержит целый отрезок (эти примеры были построены еще до того, как была доказана теорема Сарда).

В этой лекции мы изложим пример Уитни (с упрощениями). По ходу дела мы познакомимся с «разбиением единицы», которое пригодится нам и в дальнейшем.

Теорема 24.1 (Уитни). *Для всякого $n > 1$ существует C^{n-1} -гладкая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, множество критических точек которой содержит целый отрезок.*

Доказательство начнем с того, что построим компактное множество $C \subset \mathbb{R}^n$ и функцию $f: C \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $f(C) = [0; 1]$ и при этом для любых $x_1, x_2 \in C$ выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M \|x_1 - x_2\|^{n-1+\theta}$, где $M > 0$ и $\theta > 0$ — константы (это последнее условие называется *условием Липшица с показателем $n - 1 + \theta$*).

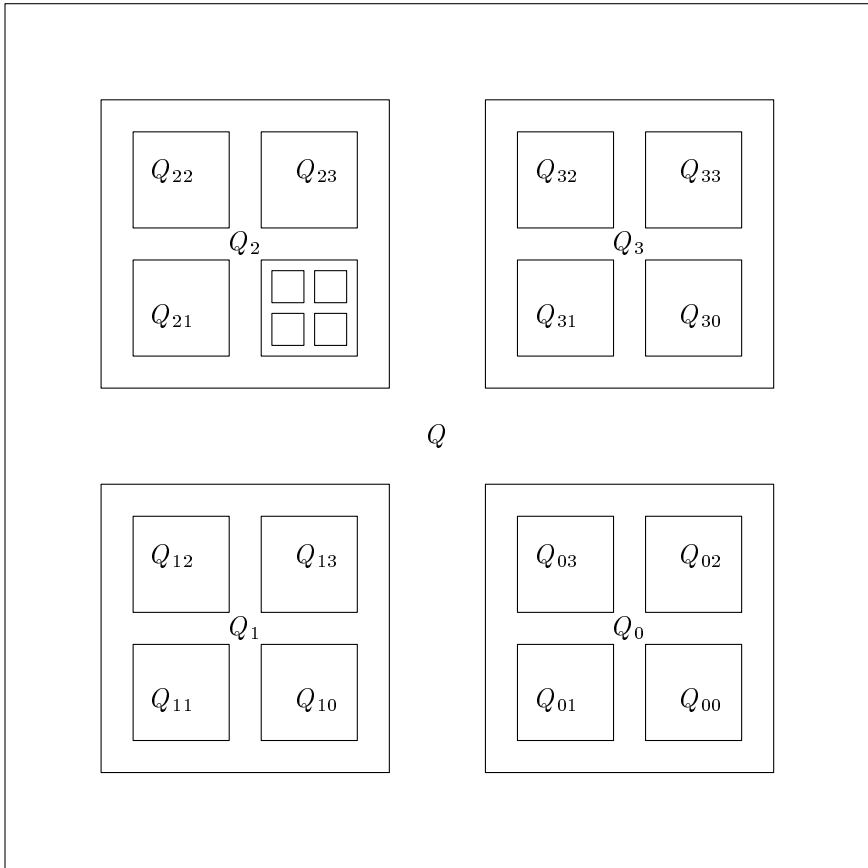
Мы опишем конструкцию для случая $n = 2$, а затем укажем, какие модификации нужно сделать для произвольного n .

Итак, рассмотрим квадрат $Q = [0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$, а в нем — четыре квадрата со стороной $1/3$, расположенные параллельно его сторонам на расстоянии $1/9$ от сторон квадрата и друг от друга. Обозначим эти квадраты Q_0, Q_1, Q_2 и Q_3 (начиная с правого нижнего, по часовой стрелке). Для каждого $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ рассмотрим гомотетию, переводящую Q в Q_i . При этом квадраты Q_0, Q_1, Q_2 и Q_3 перейдут в квадраты, которые мы обозначим Q_{i0}, Q_{i1}, Q_{i2} и Q_{i3} соответственно (рис. 5). Итерируем эту конструкцию: если у нас уже построен квадрат $Q_{i_1, \dots, i_k}$ со стороной $1/3^k$, где все i_m лежат в $\{0, 1, 2, 3\}$, то образ квадрата Q_i относительно гомотетии, переводящей Q в $Q_{i_1, \dots, i_k}$, будет обозначаться $Q_{i_1, \dots, i_k, i}$. В итоге каждой последовательности $i_1, \dots, i_k$ элементов множества $\{0, 1, 2, 3\}$ будет поставлен квадрат $Q_{i_1, \dots, i_k}$ со стороной $1/3^k$.

Обозначим через Π счетное произведение $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\} \times \dots$ (с топологией произведения, топологии на сомножителях дискретны). Всякой бесконечной последовательности $\iota = (i_1, i_2, \dots) \in \Pi$ поставим в соответствие точку

$$\Psi(\iota) = Q_{i_1} \cap Q_{i_1, i_2} \cap Q_{i_1, i_2, i_3} \cap \dots$$

Легко видеть, что отображение Ψ непрерывно и инъективно, и тем самым (ввиду компактности Π) является гомеоморфизмом на свой образ;

Рис. 5. Построение множества C

положим $C = \Psi(\Pi)$. По построению C гомеоморфно канторову множеству.

Теперь определим функцию $f: C \rightarrow \mathbb{R}$: для точки $x = \Psi(i_1, i_2, \dots) \in C$ положим

$$f(x) = \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \dots + \frac{i_n}{4^n} + \dots$$

Равенство $f(C) = [0; 1]$ очевидно. Чтобы проверить условие Липшица, предположим, что точки $x_1, x_2 \in C$ лежат в одном и том же квадрате со стороной $1/3^k$, но в разных квадратах со стороной $1/3^{k+1}$. Тогда

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1/4^k$, но $\|x_1 - x_2\| \geq 1/(9 \cdot 3^k)$. Следовательно,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 9^{\log_3 4} \cdot \|x_1 - x_2\|^{\log_3 4},$$

и остается заметить, что $\log_3 4 > 1$.

Для произвольного n начнем с куба $[0; 1]^n$ и рассмотрим в нем 2^n гомотетичных ему кубов Q_i ($0 \leq i \leq 2^n - 1$) с ребром $1/(2 + \varepsilon)$ (число $\varepsilon > 0$ выберем позднее); как и прежде, все Q_i содержатся в Q и находятся на равных расстояниях от границ Q и друг от друга. Затем для каждого i рассмотрим гомотетию (с коэффициентом $1/(2 + \varepsilon)$), переводящую Q в Q_i , и образы кубов Q_j ($0 \leq i \leq 2^n - 1$) обозначим через $Q_{ij} \subset Q_i$, и т. д. Счетное произведение множеств $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ отображим в $\mathbb{R}^n$ по правилу

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\} \mapsto (Q_{i_1} \cap Q_{i_1, i_2} \cap \dots).$$

Как и прежде, это отображение взаимно однозначно на свой образ, и его образ $C \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, гомеоморфный канторову множеству. отождествляя C с произведением множеств $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, определим функцию $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{(2^n)^k}.$$

Ясно, что $f(C) = [0; 1]$; рассуждая так же, как при $n = 2$, получаем, что для некоторого $A > 0$ выполняется соотношение

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A \|x_1 - x_2\|^{\log_{2+\varepsilon} 2^n}$$

при $x_1, x_2 \in C$. Если выбрать ε настолько малым, что $\log_{2+\varepsilon} 2^n > n - 1$, то все требования будут выполнены.

Явная конструкция C и f нам более не понадобится: теорема 24.1 немедленно следует из возможности такой конструкции и следующего результата.

Теорема 24.2. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что существует такие натуральное число $m > 0$ и константы $A > 0$, $\theta > 0$, что $|f(x') - f(x'')| \leq A \|x' - x''\|^{m+\theta}$, как только $x', x'' \in C$. Тогда f можно продолжить до функции $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, являющейся гладкой класса C^m и обладающей тем свойством, что $D^\alpha \tilde{f}(x) = 0$ при $x \in C$ и $1 \leq |\alpha| \leq m$.

Приступим к доказательству этой теоремы. Начнем с невинного определения.

Определение 24.3. *Носителем функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, где X — топологическое пространство, называется замыкание множества тех точек, в которых f отлична от нуля. Носитель функции f обозначается $\text{supp } f$.*

Вот еще одно определение (очень важное).

Определение 24.4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. *Разбиением единицы на U называется семейство функций $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (индекс i пробегает некоторое множество I), обладающее следующими свойствами:*

- (1) $\varphi_i(x) \geq 0$ для всех x и i , и $\text{supp}(\varphi_i) \subset U$ для всех i ;
- (2) для всякой точки $x \in U$ существует такая окрестность $V \ni x$, что $\text{supp}(\varphi_i) \cap V \neq \emptyset$ лишь для конечного числа индексов i ;
- (3) для всякой точки $x \in U$ имеем $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$.

Условие (1) означает, что точки, в которых функция φ_i отлична от нуля, не могут подходить сколь угодно близко к границе множества U . Условие (2), называемое *локальной конечностью*, гарантирует, что сумма из условия (3) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Разбиения единицы существуют всегда, и в большинстве приложений основное требование к ним — чтобы носители участвующих в нем функций были «достаточно мелкими» в том или ином смысле. Нам сейчас, однако, придется строить разбиение единицы, удовлетворяющее более жестким требованиям.

Ниже через $\text{diam}(E)$ обозначается диаметр множества $E \subset \mathbb{R}^n$, а через $\text{dist}(E_1, E_2)$ — нижняя грань расстояний между точками $x_1 \in E_1$ и $x_2 \in E_2$.

Лемма 24.5. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда для всякого целого $m > 0$ на открытом множестве $U = \mathbb{R}^n \setminus C \subset \mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ со следующими свойствами:*

- (1) все φ_i являются C^∞ -гладкими, носители всех φ_i компактны, множество I счетно;
- (2) для всякой точки $x \in U$ существует не более чем 2^n индексов $i \in I$, для которых $\varphi_i(x) \neq 0$;
- (3) для всякого $i \in I$ имеем $\text{diam}(\text{supp } \varphi_i) \leq 2 \text{dist}(\text{supp } \varphi_i, C)$;
- (4) существует такая константа $K > 0$, что для всякого $x \in U$, всякого $i \in I$ и всякого мультииндекса α , для которого $|\alpha| \leq m$, имеем

$$|D^\alpha \varphi_i(x)| \leq K \max(1, 1/(\text{dist}(x, C))^{|\alpha|}).$$

Число 2^n в условии (2) и коэффициент 2 в условии (3) никакого глубокого смысла не имеют: важно только, что в обоих случаях имеется равномерная оценка.

Условие (3) означает, что носители функций φ_i мельчают при подходе к границе, а условие (4) дает оценку на рост частных производных этих функций по мере такого измельчения.

Доказательство леммы. Представим U в виде объединения замкнутых кубов следующим образом. Сначала рассмотрим всевозможные замкнутые кубы с ребром единица (и с ребрами, параллельными координатным осям — далее повторять эту оговорку не будем) и с целыми координатами всех вершин. Отберем из всех этих кубов те кубы Q , у которых $\text{dist}(Q, C) > \text{diam}(Q)$. Затем рассмотрим всевозможные кубы Q с ребром $1/2$ и целыми или полуцелыми координатами всех вершин и отберем из них те кубы Q , что не содержатся ни в одном из уже отобранных и обладают свойством $\text{dist}(Q, C) > \text{diam}(Q)$; затем отберем кубы с ребром $1/2^2$ и координатами вершин вида $m/2^2$, где $m \in \mathbb{Z}$, не содержащиеся в ранее отобранных и такие, что их расстояние до C больше диаметра, и т. д. В итоге получится счетное семейство кубов $\{Q_i\}$.

Будем называть отобранные кубы с ребром $1/2^r$ кубами ранга r ; диаметр куба ранга r равен $\sqrt{n}/2^r$. Объединение кубов рангов $\leq r$ обозначим через F_r .

Лемма 24.6. (1) Если два отобранных куба имеют непустое пересечение, то их ранги отличаются не более чем на единицу.

(2) Для всякого отобранного куба Q имеем $\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, C)$; если Q — куб ранга, большего нуля, то $\text{dist}(Q, C) \leq 2 \text{diam}(Q)$.

(3) Если $x \in U \setminus F_r$, то $\text{dist}(x, C) \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^r}$.

(4) Объединение всех отобранных кубов совпадает с U .

Доказательство леммы 24.6. Докажем индукцией по r следующее утверждение: если два куба ранга $\leq r$ имеют непустое пересечение, то их ранги отличаются не более чем на единицу. В самом деле, при $r \leq 1$ доказывать нечего; для перехода от r к $r+1$ заметим, что если $x \in \partial(F_r)$, то по построению существует куб Q с ребром $1/2^r$ (и вершинами с координатами вида $k/2^r$, $k \in \mathbb{Z}$), содержащий x , не содержащийся в F_r и содержащийся в U ; следовательно, при отборе кубов ранга $r+1$ будет отобран куб, содержащийся в Q и содержащий x (так как его расстояние до C будет больше, чем $\sqrt{n}/2^{r+1}$). Этим доказано утверждение (1).

Далее, по построению имеем $\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, C)$ для всякого отобранного куба; кроме того, $\text{dist}(F_r, C) \leq 2 \cdot (\sqrt{n}/2^r)$ (в правой части

стоит удвоенный диаметр куба ранга r), так как в противном случае можно было бы добавить еще один куб ранга r , откуда вытекает (2).

Утверждение (3) следует из того, что если данное неравенство не выполнено, то точка x была бы включена в какой-нибудь куб ранга $\leq r$. Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$ в утверждении (3), получаем (4). $\square$

Зафиксируем теперь какую-нибудь C^∞ -функцию ψ на $\mathbb{R}^n$, принимающую только неотрицательные значения и удовлетворяющую условию $\text{supp}(\psi) = [-1.1/2; 1.1/2]^n$ (такая функция существует ввиду предложения 23.1; число 1.1 означает «немножко больше единицы»).

Пусть c_i — центр куба Q_i и $2l_i$ — длина его ребра; положим $\phi_i(x) = \psi((x - c_i)/l_i)$. Заметим, что $\text{supp } \phi_i$ — это куб, получающийся из Q_i гомотетией с коэффициентом 1.1 относительно его центра; поэтому если заменить в лемме φ_i на ϕ_i , то ввиду леммы 24.6 условия (1)—(3) будут выполнены, за тем исключением, что $\sum_{i \in I} \phi_i(x)$ не обязана тождественно равняться единице. Этот недостаток исправляется с помощью следующего стандартного приема: поскольку функция ϕ_i не обращается в нуль на кубе Q_i , для всякой точки $x \in U$ сумма $\sum_i \phi_i(x)$ положительна; положим теперь

$$\varphi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{j \in I} \phi_j(x)}.$$

Множества нулей (и тем самым носители) у функций φ_i и ϕ_i совпадают, и при этом $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ для всякого $x \in U$; тем самым мы добились выполнения условий (1)—(3).

Займемся условием (4). Пусть

$$K_1 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \psi(x)|.$$

Если $\text{supp } \phi_i$ соответствует кубу ранга k , то, очевидно,

$$|D^\alpha \phi_i(x)| \leq 2^{|\alpha|} K_1 = K_2 / (\text{diam}(\text{supp } \phi_i))^{|\alpha|},$$

где K_2 — некоторая константа.

Перейдем от ϕ_i к φ_i . Для этого обозначим через $\delta > 0$ наименьшее значение функции ψ на кубе $[-1/2; 1/2]^n$ (имеем, стало быть, $\phi_i(x) \geq \delta$, если $x \in Q_i$), а через L — наибольшее значение функции ψ . Воспользуемся следующим утверждением, тривиально проверяемым с помощью индукции по порядку производной:

Лемма 24.7. Если u и v — гладкие функции n переменных и α — мультииндекс, то

$$D^\alpha \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\sum_{|\beta|+|\gamma| \leq |\alpha|} C_{\beta,\gamma} D^\beta u \cdot D^\gamma v \cdot v^{n_{\beta\gamma}}}{v^{2|\alpha|}}, \quad (24.1)$$

где $C_{\beta,\gamma} \in \mathbb{Z}$ и $n_{\beta\gamma} \in \mathbb{N}$ — абсолютные константы.

Запишем теперь равенство $\varphi_i(x) = \phi_i / \sum_j \phi_j(x)$ и обозначим в нем числитель через u , а знаменатель через v . Поскольку всякий $x \in U$ лежит в каком-то из кубов Q_i (лемма 24.6(3)), имеем $\phi_i(x) \geq \delta$, откуда $v(x) \geq \delta$. Займемся числителем формулы (24.1). Ввиду уже доказанного утверждения (2) число ненулевых слагаемых в сумме $v(x) = \sum \phi_j(x)$ не превосходит 2^n , а ввиду леммы 24.6 имеем $\text{diam supp } \varphi_j \geq \text{diam supp } \varphi_i / 2$, как только $\varphi_j(x) \neq 0$. Следовательно, при $|\gamma| \leq m$ имеем

$$|D^\gamma v(x)| \leq 2^n K_2 \cdot 2^m / (\text{diam}(\text{supp } \phi_i))^{|\gamma|} = K_3 / (\text{diam}(\text{supp } \phi_i))^{|\gamma|}.$$

Кроме того, мы знаем, что $|D^\beta u(x)| \leq K_2 / (\text{diam}(\text{supp } \phi_i))^{|\gamma|}$. Поэтому если $\text{supp } \varphi_i$ соответствует кубу ранга 1, то $|D^\alpha \varphi_i(x)|$ не превосходит некоторой абсолютной константы. Если же $\text{supp } \varphi_i$ соответствует кубу ранга > 1 , то $\text{diam}(\text{supp } \phi_i) \leq 1$; наконец, если $n_{\beta\gamma} \leq N$ при $|\beta| + |\gamma| \leq m$, а $|\psi(x)|$ ограничен сверху числом $C \geq 1$, то $|v^{n_{\beta\gamma}}|$ ограничен сверху абсолютной константой, а именно, C^N . Поэтому в числителе формулы (24.1) и общее число слагаемых, и абсолютные величины коэффициентов ограничены при $|\alpha| \leq M$ абсолютными константами, так что

$$|D^\alpha \varphi_i(x)| \leq K_4 / (\text{diam}(\text{supp } \phi_i))^{|\alpha|}. \quad (24.2)$$

Рассмотрим теперь ранги кубов Q_i , соответствующих тем φ_i , для которых $\varphi_i(x) \neq 0$. По лемме 24.6 (1) ранги этих кубов либо все одинаковы и равны некоторому числу r , либо принимают два значения: r и $r + 1$. Если $r = 0$, то из (24.2) следует, что $|D^\alpha \varphi_i(x)| \leq K_4 / 0.55^{|\alpha|} = K_5$; в противном случае $x \notin F_{r-1}$, откуда по лемме 24.6(3) получаем, что

$$\text{dist}(x, C) \leq \sqrt{n} / 2^r \leq 2 \text{diam}(\text{supp } (\varphi_i)),$$

так что $1 / \text{diam}(\text{supp } (\varphi_i)) \leq 2 / \text{dist}(x, C)$ и ввиду (24.2) получаем, что

$$|D^\gamma v(x)| \leq 2^{|\alpha|} K_4 / (\text{dist}(x, C)^{|\alpha|}).$$

Стало быть, утверждение (4) выполнено при $K = \max(K_5, 2^{|\alpha|} K_4)$, чем доказательство леммы 24.5 и завершается. $\square$

Доказательство теоремы 24.2. Пусть $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы из леммы 24.5. Для всякого $i \in I$ выберем точку $a_i \in C$, в которой реализуется минимум расстояний между точками множеств C и $\text{supp } \varphi_i$.

Лемма 24.8. Если $x \in \text{supp } \varphi_i$ и $a \in C$, то $\|a_i - a\| \leq 4\|x - a\|$.

Доказательство леммы. Пусть минимум расстояний между точками множества $\text{supp } \varphi_i$ и C реализуется для точек $y_i \in \text{supp } \varphi_i$ и a_i . Заметим, что

$$\begin{aligned} \|a - a_i\| &\leq \|a - y_i\| + \|y_i - x\| + \|x - a\| \leq \\ &\leq \text{dist}(\text{supp } \varphi_i, C) + \text{diam}(\text{supp } \varphi_i) + \|x - a\| \leq 3 \text{dist}(\text{supp } \varphi_i, C) + \|x - a\| \end{aligned}$$

(мы воспользовались условием (3) из леммы 24.5); поскольку

$$\text{dist}(\text{supp } \varphi_i, C) \leq \|x - a\|,$$

лемма доказана. $\square$

Положим теперь для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sum_{i \in I} f(a_i) \varphi_i(x) & \text{при } x \notin C; \\ f(x) & \text{при } x \in C. \end{cases} \quad (24.3)$$

(сумма в правой части конечна ввиду локальной конечности разбиения единицы) и покажем, что функция $\tilde{f}$ является искомой. Покажем сначала, что функция $\tilde{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Для этого надо доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = f(a)$ для всякой точки $a \in C$. Заметим, что для $x \in U$ имеем

$$|f(a) - \tilde{f}(x)| = \left| f(a) \sum_{i \in I} \varphi_i(x) - \sum_{i \in I} f(a_i) \varphi_i(x) \right| \leq \sum_{i \in I} |f(a) - f(a_i)| \varphi_i(x). \quad (24.4)$$

Если какое-то из слагаемых в правой части отлично от нуля, то $x \in \text{supp } \varphi_i$. Воспользуемся теперь тем, что функция f удовлетворяет условию Липшица (впрочем, на данном этапе хватило бы и равномерной непрерывности): если $\|x - a\| \leq \varepsilon$, то $\|a_i - a\| \leq 4\varepsilon$ ввиду леммы 24.8, откуда $|f(a) - f(a_i)| \leq A(4\varepsilon)^{m+\theta}$. Поскольку $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$, получаем, что

если $\|x - a\| \leq \varepsilon$, то $|f(a) - \tilde{f}(x)| \leq A(4\varepsilon)^{m+\theta}$, что стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Итак, непрерывность функции $\tilde{f}$ доказана.

Докажем, наконец, что $\tilde{f}$ является C^m -гладкой, а ее частные производные порядка $\leq m$ в точках C равны нулю. Заметим, что функция $\tilde{f}$ гладка (и даже бесконечно гладка) вне C . Легко видеть, что для доказательства оставшегося утверждения достаточно проверить, что каждая частная производная порядка $\leq m$ функции $\tilde{f}|_U$, будучи продолженной нулем на C , станет непрерывной функцией на всем $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем мультииндекс α , где $|\alpha| \leq m$. Нам надо доказать, что если $a \in C$, то $\lim_{\text{dist}(x, C) \rightarrow 0} D^\alpha \tilde{f}(x) = 0$.

Пусть $x \in U$, и пусть $a \in C$ — точка, в которой достигается минимум расстояния от x до точек C . Поскольку $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ для всякого x , имеем $\sum_i D^\alpha \varphi_i(x) = 0$ для всякого x (в этом месте используется локальная конечность). Поэтому

$$\begin{aligned} |D^\alpha \tilde{f}(x)| &= \left| \sum_i f(a_i) D^\alpha \varphi_i(x) - \sum_i f(a) D^\alpha \varphi_i(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_i |f(a_i) - f(a)| \cdot |D^\alpha \varphi_i(x)|. \end{aligned} \quad (24.5)$$

Лемма 24.8 показывает, что $\|a_i - a\| \leq 4\|x - a\| = 4 \operatorname{dist}(x, C)$. Следовательно, $|f(a_i) - f(a)| \leq A \cdot 4^{m+\theta} (\operatorname{dist}(x, C))^{m+\theta}$. С другой стороны, из условия (4) леммы 24.5 следует, что $|D^\alpha \varphi_i(x)| \leq K \max(1, 1/(\operatorname{dist}(x, C))^{|\alpha|})$. Наконец, количество ненулевых слагаемых в правой части (24.5) не превосходит 2^n ввиду условия (2) леммы 24.5. Стало быть,

$$|D^\alpha \tilde{f}(x)| \leq 2^n \cdot A \cdot 4^{m+\theta} (\operatorname{dist}(x, C))^{m+\theta} \cdot K \max(1, 1/(\operatorname{dist}(x, C))^{|\alpha|}).$$

Поскольку $|\alpha| \leq m$, правая часть стремится к нулю при $\operatorname{dist}(x, C) \rightarrow 0$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 24.2, которую мы только что доказали, является частным случаем так называемой «теоремы Уитни о продолжении»; другой ее частный случай, известный под названием «теоремы Бореля», гласит, что для всякого формального степенного ряда от n переменных существует функция из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которой он является рядом Тейлора.

Задачи ко второму семестру

1. Мера Лебега на прямой

2.1. Пусть I — несчетное множество индексов и $\{a_i\}_{i \in I}$ — семейство положительных чисел, пронумерованное элементами I . Докажите, что

$$\sup_{\substack{S \subset I \\ S \text{ конечно}}} \sum_{j \in S} a_j = +\infty.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — σ -алгебра подмножеств в множестве X . Отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется измеримым (относительно $\mathcal{B}$), если прообраз всякого борелевского подмножества в $\mathbb{R}$ является элементом $\mathcal{B}$. Аналогично определяется измеримое отображение в произвольное топологическое пространство.

2.2. Покажите, что функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда измеримы все множества $f^{-1}[a; +\infty)$ для $a \in \mathbb{R}$; то же — с заменой $f^{-1}[a; +\infty)$ на $f^{-1}(a; +\infty)$.

2.3. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ для всякого $x \in X$, и пусть все $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы. Докажите, что f измерима.

2.4. Пусть $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Определим функцию $g: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty]$ по формуле $g(c) = \text{card}(f^{-1}(c))$. Покажите, что g измерима (относительно σ -алгебры борелевских подмножеств в $\mathbb{R}$).

2.5. а) Найдите лебеговскую меру множества чисел из отрезка $[0; 1]$, в десятичной записи которых не встречается цифра 7.

б) Найдите лебеговскую меру множества чисел из отрезка $[0; 1]$, в десятичной записи которых не встречается сочетание цифр 2007.

2.6. Пусть $E \subset [0; 1]$ — измеримое по Лебегу множество, обладающее тем свойством, что для всякого отрезка $[a; b] \subset [0; 1]$ имеем $\mu(E \cap [a; b]) = (b - a)\mu(E)$. Докажите, что $\mu(E)$ равна нулю или единице.

2.7. а) Покажите, что на кольце целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$ существует мера μ , определенная на σ -алгебре борелевских подмножеств и обладающая следующими свойствами: (1) $\mu(a + B) = \mu(B)$ для всякого борелевского $B \subset \mathbb{Z}_p$ и всякого $a \in \mathbb{Z}_p$; (2) $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. Через $a + B$ обозначается множество $\{a + x: x \in B\}$.

б) Покажите, что мера, о которой идет речь в пункте (а), единственна.

2.8. Пусть $C \subset [0; 1]$ — «классическое» канторово множество (полученное удалением средних третей отрезков). Докажите, что на $[0; 1]$ существует мера ν (определенная на σ -алгебре борелевских подмножеств) со следующими свойствами: (1) $\nu(B) = \nu(B \cap C)$ для всякого борелевского $B \subset [0; 1]$; (2) $\nu(X) = 0$, если X — конечное множество; (3) $\nu([0; 1]) > 0$.

2.9. Существует ли непостоянная непрерывная функция $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что для всех $x \in [0; 1]$, кроме некоторого множества лебеговой меры нуль, производная $f'(x)$ существует и равна нулю?

2. Мера и интеграл Лебега

2.10. Докажите, что семейство всех борелевских подмножеств отрезка $[0; 1]$ имеет мощность континуум.

2.11. Докажите, что в $\mathbb{R}$ существуют измеримые (по Лебегу) подмножества, не являющиеся борелевскими.

2.12. Приведите пример нигде не плотного (и измеримого) подмножества отрезка, имеющего положительную меру.

2.13. Для каждого $\varepsilon \in [0; 1]$ постройте измеримое подмножество $E \subset [0; 1]$, для которого $\bar{E} = [0; 1]$ и $\mu(E) = \varepsilon$.

2.14. Пусть $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность измеримых подмножеств пространства с мерой (X, μ) , для которой $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$. Докажите, что почти все $x \in X$ содержатся только в конечном числе множеств E_i .

2.15. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx$.

2.16. Пусть f — суммируемая (относительно меры Лебега) функция на отрезке $[a; b]$. Докажите, что функция

$$x \mapsto \int_{[a; x]} f(t) dt$$

непрерывна.

2.17. Для $x \in (0; 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $f(x)$ количество семерок среди первых n знаков после запятой в десятичной записи числа x . Докажите, что для почти всех $x \in (0; 1)$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/n = 1/10$.

2.18. Найдите меру множества чисел на интервале $(0; 1)$, в десятичной записи которых первая двойка встречается раньше первой тройки.

3. Интегрирование в $\mathbb{R}^n$ и не только

По умолчанию слово «мера» означает «мера Лебега», а через μ обозначается мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Вместо $d\mu$ пишем также что-нибудь наподобие $dx_1 \dots dx_n$.

2.19. Докажите, что всякое аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, отличное от самого $\mathbb{R}^n$, имеет меру нуль.

2.20. Положим

$$X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

Найдите $\mu(X_n)$.

2.21. Пусть $I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [0; 1]\}$.

а) Найдите $\int_I \max(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

б) Найдите $\int_I \min(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

2.22. а) Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование, заданное диагональной матрицей. Докажите, что $\mu(A(E)) = |\det(A)|\mu(E)$ для всякого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

б) Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольное невырожденное линейное преобразование. Докажите, что $\mu(A(E)) = |\det(A)|\mu(E)$ для всякого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

в) То же, что в пункте (б), но преобразование A вырождено.

2.23. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая функция; для всякого $x \in \mathbb{R}$ положим $g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$.

а) Покажите, что функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема.

б) Пусть $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$; что можно сказать про $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx$?

2.24. Пусть $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — суммируемые функции.

а) Покажите, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ определено число $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.

б) Покажите, что функция $x \mapsto (f * g)(x)$ суммируема.

в) Предположим дополнительно, что функция f принадлежит классу C^1 . Покажите, что и $f * g$ принадлежит классу C^1 .

2.25. Пусть $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции класса C^1 ; определим отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Докажите, что множество $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ не содержит внутренних точек («гладких кривых Пеано не бывает»).

2.26. Может ли неотрицательная измеримая и всюду конечная функция на $\mathbb{R}$ иметь бесконечный интеграл по любому отрезку?

2.27. Покажите, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет лебеговскую меру нуль тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ множество X содержится в не более чем счетном объединении открытых кубов (с ребрами, параллельными координатным осям), сумма мер которых не превосходит ε .

4. Производная

В задачах, в которых требуется найти производные отображений, следует по возможности записывать соответствующие линейные отображения «в инвариантном виде» (не используя базиса). Утверждения про $o(\cdot)$ надо обосновывать.

2.28. Существует ли дифференцируемое отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, отображающее ось абсцисс на график функции $y = |x|$?

2.29. Пусть отображение $f: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ действует по формуле $A \mapsto A^2$. Найдите $f'(X)$ для данной матрицы X .

2.30. Пусть $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ — открытое подмножество, состоящее из невырожденных матриц, и $g: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ действует по правилу $A \mapsto A^{-1}$. Найдите $g'(X)$ для данной $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

2.31. а) Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение, действующее по формуле $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ (все $a_i \in \mathbb{C}$ — константы). Найдите $f'(a)$ для данного $a \in \mathbb{C}$.

б) То же задание для функции $f(z) = \sin z$.

в) Пусть снова f — то же, что в пункте (а). Найдите производную в точке $a \in \mathbb{C}$ отображения из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$, заданного формулой $z \mapsto |f(z)|^2$.

2.32. Пусть отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ задается по правилу $z \mapsto |z|$.

а) Для каких $z \in \mathbb{C}$ оно дифференцируемо?

б) Чему может равняться ранг его производной в тех точках, где оно дифференцируемо?

2.33. Пусть $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_n = 0\}$ и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\pi_p(x) = \overline{p, x} \cap \mathbb{R}^{n-1}$. (Через $\overline{p, x}$ обозначена прямая, соединяющая p и x ; точка $\pi_p(x)$ определена, разумеется, не для всех x , но для x , принадлежащих некоторому открытому подмножеству $U \subset \mathbb{R}^n$.) Чему может равняться ранг $\pi'_p(x)$ для различных $x \in U$?

2.34. Отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие набору чисел $(x_1, \dots, x_n)$ коэффициенты многочлена $(X - x_1) \dots (X - x_n)$. Найдите ранг $f'(a_1, \dots, a_n)$ для данной точки $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

2.35. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное выпуклое подмножество. Пусть отображение $f: \mathbb{R}^n \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие точке $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ точку $y \in K$, ближайшую к x (почему эта точка единственна?). Верно ли, что отображение f всюду дифференцируемо для всякого выпуклого компакта K ?

2.36*. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, для которого единичный шар $\{v: \|v\| \leq 1\}$ компактен. Докажите, что $\dim E < \infty$.

5. Высшие производные и прочее

2.37. Для функции f , заданной на (открытом подмножестве в) $\mathbb{R}^2$ (с координатами x и y), ее *лапласиан* задается формулой $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. Выразите Δf через полярные координаты (r, φ) и производные f по этим координатам.

2.38. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *однородной степени α* , если для всякого $t > 0$ выполнено тождество $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$.

а) Докажите, что если f — функция класса C^1 , однородная степени α , то выполнено тождество

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f.$$

б) Верно ли обратное утверждение?

2.39. Пусть F — однородный многочлен степени p от $x_1, \dots, x_n$, и пусть q — целое положительное число, меньшее p . Докажите тождество

$$\sum_{|\alpha|=q} \frac{D^\alpha F(a_1, \dots, a_n) x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\beta|=p-q} \frac{D^\beta F(x_1, \dots, x_n) a^\beta}{\beta!}.$$

2.40. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^2 , у которой все частные производные первого порядка в начале координат равны нулю. Положим $a_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$.

а) Пусть матрица (a_{ij}) положительно определена. Докажите, что в начале координат у функции f имеется локальный минимум.

б) Пусть матрица (a_{ij}) имеет сигнатуру $(2, n-2)$ (причем $n > 2$). Докажите, что в начале координат у функции f локального экстремума нет.

в) Пусть матрица (a_{ij}) имеет сигнатуру $(n-1, 0)$. Что можно сказать о наличии экстремума у f в начале координат?

2.41. а) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^1 . Предположим, что все частные производные функции f ограничены на U . Докажите, что существует такое $K > 0$, что $|f(p) - f(q)| \leq K \|p - q\|$ для любых $p, q \in U$.

б) Останется ли верным утверждение пункта (а), если вместо выпуклости множества U потребовать только, чтобы U было связным?

2.42. Приведите пример C^1 -отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, не являющегося диффеоморфизмом на свой образ, но обладающего тем свойством, что $f'(x)$ невырождено при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

2.43. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $f: X \rightarrow X$ — отображение.

а) Предположим, что существует такое $\lambda \in (0, 1)$, что $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \rho(x_1, x_2)$, как только $x_1 \neq x_2$. Докажите, что у отображения f существует неподвижная точка (т. е. такое $x \in X$, что $f(x) = x$).

б) Пусть известно лишь то, что $\rho(f(x_1), f(x_2)) < (x_1, x_2)$, как только $x_1 \neq x_2$. Покажите, что в этой ситуации у отображения f неподвижной точки может не быть.

в) Пусть в условиях пункта (б) пространство X компактно. Всегда ли в этой ситуации у f есть неподвижная точка?

6. Неявные функции и подмногообразия в $\mathbb{R}^n$

2.44. Является ли график функции $y = |x|$ гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

2.45. Уравнение $x + y + x^5 - y^5 = 0$ задает в окрестности начала координат y как функцию от x ; обозначим ее $y = \varphi(x)$.

а) Найдите $\varphi^{(5)}(0)$.

б) Найдите $\varphi^{(2004)}(0)$.

2.46. Пусть a_n — наименьший положительный корень уравнения $x^5 + 1 = nx$. Найдите три первых непостоянных члена асимптотики последовательности $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$.

2.47. Пусть $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^1 , у которой в точке $a \in \mathbb{R}^n$ все частные производные отличны от нуля. Тем самым уравнением $f(x, y, z) = f(a)$ координата x в окрестности точки a задается как функция от y и z , y задается как функция от x и z , а z задается как функция от x и y . Упростите выражение

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

2.48. Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проекция $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Чему равен ранг производной отображения p в различных точках сферы?

2.49. Через $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ обозначим множество $(n \times n)$ -матриц с действительными коэффициентами. Покажите, что следующие подмножества в $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (отождествляемом с $\mathbb{R}^{n^2}$) являются подмногообразиями:

а) специальная линейная группа

$$\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(X) = 1\};$$

б) ортогональная группа

$$\text{O}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : {}^t X X = I\}$$

(через ${}^t X$ обозначена матрица, транспонированная к X , а через I — единичная матрица).

2.50. Положим

$$U_n = \{X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \overline{t} X X = I\}$$

(унитарная группа). Покажите, что U_n — гладкое подмногообразие в $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ (отождествляемом с $\mathbb{R}^{2n^2}$).

2.51. Пусть $X \subset \mathbb{C}^3$ — подмножество, заданное системой уравнений

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 &= 1/2, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Покажите, что X — гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^3$ (отождествляемом с $\mathbb{R}^6$).

7. Дифференциальные уравнения; замена переменной в интеграле

2.52. Пусть X — компактное метрическое пространство и $C(X)$ — пространство непрерывных функций на нем с sup -нормой. Пусть $S \subset C(X)$ — относительно компактное подмножество. а) Покажите, что S равномерно ограничено. б) Покажите, что S равностепенно непрерывно.

2.53. Нарисуйте на плоскости интегральные кривые уравнения $x' = x^2$.

2.54. Пусть в дифференциальном уравнении $x' = v(t, x)$ правая часть имеет класс гладкости C^1 . Покажите, что на достаточно малом отрезке $[t_0; t_0 + h]$ ломаные Эйлера с начальными условиями (t_0, x_0) равномерно сходятся к решению уравнения с теми же начальными условиями, когда максимальная длина отрезка разбиения (по которому строится ломаная) стремится к нулю.

2.55. Пусть $x' = v(t, x)$ — дифференциальное уравнение с непрерывной правой частью, определенной на всем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, что $\|v(t, x)\| \leq C_1 \|x\| + C_2$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что для любых начальных условий (t_0, x_0) существует решение уравнения с данными начальными условиями, определенное на всем $\mathbb{R}$.

2.56. а) Найдите $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. (Указание. Перейдите к полярным координатам.)

б) Найдите $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

в) Пусть $\|q_{ij}\|$ — симметрическая положительно определенная матрица; положим $Q(x) = \sum q_{ij} x_i x_j$. Найдите $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx_1 \dots dx_n$.

2.57. Найдите объем единичного шара (относительно обычной евклидовой нормы) в $\mathbb{R}^n$. (*Указание.* Удобно вычислять по индукции, переходя от n к $n + 2$.)

2.58. Пусть $B_n \subset \mathbb{R}^n$ — единичный шар относительно евклидовой нормы. При каких $\alpha > 0$ конечен интеграл $\int_{B_n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} d\mu_n(x)$?

8. Свойства гладких отображений

2.59. Пусть $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ — два непересекающихся замкнутых подмножества. Докажите, что существует бесконечно гладкая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами: $f(x) = 1$ для всех $x \in F_1$, $f(x) = 0$ для всех $x \in F_2$, $0 \leq f(x) \leq 1$ для всех x .

2.60. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, $U \supset F$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^k ($0 < k \leq \infty$). Докажите, что существует функция $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (также класса C^k), обладающая тем свойством, что $\tilde{f} = f$ на некотором открытом множестве, содержащем F .

2.61. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел, обладающая тем свойством, что существует (конечный) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{1}{n}$. Выясните, всегда ли в этой ситуации существует C^1 -функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $f(1/n) = a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В следующих трех задачах участвует пространство $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. По определению, это множество C^∞ -отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ со следующей топологией: базу открытых множеств составляют всевозможные подмножества вида

$$W(K, r, f, \varepsilon) = \left\{ g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \sup_{\substack{|\alpha| \leq r \\ x \in K}} \|D^\alpha g(x) - D^\alpha f(x)\| < \varepsilon \right\},$$

где $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (α может быть и «пустым» мультииндексом веса 0). Общее указание к задачам 2.62—2.64: пользуйтесь теоремой Сарда.

2.62. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. а) Докажите, что в любой окрестности отображения f найдется отображение g , для которого ранг g' не меньше единицы всюду на $\mathbb{R}^2$. (*Указание.* Поищите его среди отображений вида $f + A$, где $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ линейно.) б) Верно ли, что в любой окрестности данного f найдется g , у которого g' всюду невырождено?

2.63. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Докажите, что в любой окрестности отображения f найдется отображение g , обладающее тем свойством, что если $g(x) = 0$, то $g'(x) \neq 0$.

2.64. Критическая точка p гладкой (класса C^2) функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется невырожденной, если $\det \|\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j(p)\| \neq 0$ (матрица, об определителе которой идет речь, называется гессианом этой критической точки). Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Докажите, что в любой окрестности отображения f найдется отображение g , все критические точки которого невырождены.

2.65. Докажите, что для всякого $k > 0$ существует функция класса C^k из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ с несчетным множеством критических значений.

Экзамен за второй семестр

2.66. Пусть $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ — ненулевой многочлен и

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Покажите, что множество V имеет нулевую меру.

2.67. Является ли гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ подмножество, заданное уравнением $y^2 = x^3$?

2.68. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Зададим меру на S , перенеся меру Лебега на интервале $[0; 1)$ с помощью биекции $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Положим

$$T = \{(A, B, C) \in S \times S \times S : \text{треугольник } ABC \text{ тупоугольный}\}.$$

Найдите меру множества T .

2.69. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt[3]{(1+x)^2 + (1+y)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2 + (1-y)^2} + \\ + \sqrt[3]{(1-x)^2 + (1+y)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2 + (1-y)^2}.$$

Имеется ли у функции f в точке $(0; 0)$ локальный экстремум, и если да, то какой?

2.70. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и $f: K \rightarrow [0; 1]$ — отображение, обладающее тем свойством, что $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^{n+1}$ для всяких $x, y \in K$ (через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма). Докажите, что f не является сюръективным (не пользуясь, по возможности, утверждениями, не доказанными в курсе).

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

25. Многообразие и касательные пространства

Основные определения

В прошлом семестре мы дали определение гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, локальных карт на нем, а также гладких функций и гладких отображений. Для большей гибкости полезно, однако, дать определение, от вложения в $\mathbb{R}^n$ не зависящее.

Зафиксируем число (точнее, символ) $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Определение 25.1. k -мерным гладким многообразием класса C^r называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой.

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α , называемых *координатными окрестностями*.

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ — открытое подмножество (эти гомеоморфизмы называются *локальными картами*).

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$.

Предложение 20.6 (вкуче с тем очевидным обстоятельством, что любое подмножество в $\mathbb{R}^n$ является хаусдорфовым пространством со счетной базой) показывает, что всякое гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ является абстрактным гладким многообразием.

Гладкое отображение двух абстрактных гладких многообразий определяется дословно так же, как для подмногообразий в евклидовых пространствах, с помощью определения 20.7 (в этом определении ничего, кроме локальных карт, не используется). Определение диффеоморфизма абстрактных многообразий также дословно совпадает с определением 20.8.

Хотя понятие абстрактного многообразия (определение 25.1) выглядит более общим, чем понятие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ (определение 20.3), они равносильны: можно показать, что всякое абстрактное

гладкое k -мерное многообразие класса C^r диффеоморфно подмногообразию в $\mathbb{R}^n$ класса C^r при некотором n . Эту теорему (без предположений хаусдорфовости или счетной базы в определении 25.1 она была бы по понятным причинам неверна) мы доказывать не будем. Доказательство для случая компактных многообразий можно прочесть во втором томе учебника В. А. Зорича «Математический анализ» или в книге Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко «Современная геометрия», а в общем случае — в первой главе книги С. Стернберга «Лекции по дифференциальной геометрии». Существуют связные «многообразия» (топологические пространства, покрытые координатными окрестностями с гладкими функциями перехода), не являющиеся хаусдорфовыми, или не имеющие счетной базы, или сочетающие оба эти порока.

Не следует думать, что определение 25.1 — излишество: во многих ситуациях многообразие естественно определять именно как абстрактное, а выбор (и поиск) конкретного вложения в $\mathbb{R}^n$ лишь бессмысленно усложняет дело. Мы сейчас рассмотрим два важных примера многообразий, которые естественно определять именно таким образом.

Вещественное проективное пространство

Как известно, n -мерное вещественное проективное пространство, обозначаемое $\mathbb{RP}^n$, представляет собой множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Такую прямую можно задать, указав любую ее точку, отличную от начала координат; координаты этой точки называются однородными координатами точки проективного пространства. Однородные координаты $(x_0 : \dots : x_n)$ и $(x'_0 : \dots : x'_n)$ (при записи однородных координат их принято отделять не запятыми, а двоеточиями) задают одну и ту же точку тогда и только тогда, когда $x'_j = \lambda x_j$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и для всех целых $j \in [0; n]$.

Определим теперь в $\mathbb{RP}^n$ координатные окрестности. Именно, для каждого целого $i \in [0; n]$ положим

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n : x_i \neq 0\}.$$

В качестве локальной карты, соответствующей координатной окрестности U_i , рассмотрим отображение $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i).$$

Легко видеть, что отображение φ_i корректно определено и взаимно однозначно.

Проверим согласованность локальных карт (иными словами, гладкость замены координат при переходе от одной локальной карты к

другой). Пусть $0 \leq i < j \leq n$. Тогда легко видеть, что

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_{j-1} \neq 0\},$$

$$\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_i \neq 0\}.$$

Поскольку точка $(y_1, \dots, y_n) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ является образом точки $(y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \in \mathbb{RP}^n$ при отображении φ_i , а образ той же точки при отображении φ_j есть, очевидно,

$$(y_1/y_j, \dots, y_{i-1}/y_j, 1/y_j, y_{i+1}/y_j, \dots, y_{j-1}/y_j, y_{j+1}/y_j, \dots, y_n/y_j).$$

Стало быть, отображение φ_{ij} действительно является диффеоморфизмом, и $\mathbb{RP}^n$ удовлетворяет определению многообразия (класса C^∞ , и даже, если угодно, вещественно-аналитического).

Мы ввели на $\mathbb{RP}^n$ локальные карты, но ничего еще не сказали о топологии. Зададим ее так: множество $W \subset \mathbb{RP}^n$ считается открытым, если для всякого целого $i \in [0; n]$ множество $\varphi_i(W \cap U_i)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Теперь остается проверить, что φ_i — не просто взаимно однозначные отображения, но гомеоморфизмы, а также что $\mathbb{RP}^n$ с этой топологией хаусдорфово и имеет счетную базу. Все это оставляется читателю.

Грассманиан

Грассманиан, или многообразие Грассмана, является обобщением проективного пространства. Как множество грассманиан $G(k, n)$ есть множество всех k -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Структура гладкого многообразия вводится на нем следующим образом.

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ базис $(v_1, \dots, v_n)$, где $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $v_n = (0, \dots, 0, 1)$. Во всяком k -мерном подпространстве $V \subset \mathbb{R}^n$ можно также выбрать базис; если рассматривать элементы этого базиса как вектор-строки, то такой базис можно записать как $(n \times k)$ -матрицу ранга k . Две такие матрицы задают одно и то же подпространство в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда одна получается из другой умножением слева на невырожденную $(k \times k)$ -матрицу.

Через $U_a \subset G(k, n)$, где $a = (a_1, \dots, a_k)$ — мультииндекс ($1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n$), обозначим подмножество, состоящее из подпространств V , соответствующих матрицам, в которых минор, образованный столбцами с номерами $a_1, \dots, a_k$, отличен от нуля (на геометрическом языке это означает, что V трансверсально $(n - k)$ -мерному подпространству, порожденному векторами v_j для j , не входящих в мультииндекс a). Среди всех матриц, соответствующих данному подпространству $V \in U_a$, существует ровно одна, у которой $(k \times k)$ -матрица, образованная столбцами с номерами $a_1, \dots, a_k$, является единичной. У нее

имеется $kn - k^2 = k(n - k)$ элементов, не лежащих в столбцах с номерами $a_1, \dots, a_k$; сопоставляя пространству V набор этих $k(n - k)$ чисел, получаем взаимно однозначное отображение

$$\varphi_a: U_a \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}.$$

Объявим всевозможные $U_a \subset G(k, n)$ координатными окрестностями, а φ_a — локальными картами. Из формулы для элементов обратной матрицы очевидно, что отображения замены координат бесконечно дифференцируемы (и даже вещественно аналитичны). Будем говорить, что подмножество $W \subset G(k, n)$ открыто, если для всякого мультииндекса a множество $\varphi_a(W \cap U_a)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что $G(1, n)$ диффеоморфно $\mathbb{RP}^{n-1}$. В общем случае легко проверить, что топологическое пространство $G(k, n)$ хаусдорфово; так как наличие счетной базы очевидно, получаем, что $G(k, n)$ является C^∞ -многообразием размерности $k(n - k)$.

Как и проективное пространство, $G(k, n)$ компактно. Чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть пространство Z , состоящее из всевозможных наборов $(e_1, \dots, e_k)$ векторов из $\mathbb{R}^n$, в которых все e_j имеют единичную длину и попарно ортогональны; это пространство, очевидно, компактно (оно, кстати, называется многообразием Штифеля), и проверяется, что отображение $Z \rightarrow G(k, n)$, ставящее в соответствие набору $(e_1, \dots, e_k)$ порожденное им подпространство в $\mathbb{R}^n$, непрерывно и сюръективно.

Касательные пространства

Вернемся к общей теории. Наша ближайшая цель — определить производную гладкого отображения гладких многообразий таким образом, чтобы при этом получилось обобщение определения производной отображения открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Как и раньше, производная будет линейным отображением векторных пространств, но на сей раз необходимо для начала эти векторные пространства определить.

Определение 25.2. Пусть X — гладкое многообразие и $p \in X$. *Кривой, проходящей через точку p* , называется такое гладкое отображение $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$, что $c(0) = p$ (число $\varepsilon > 0$ у разных кривых может быть разным).

Две гладкие кривые c_1 и c_2 , проходящие через p , называются *эквивалентными*, если для любой координатной окрестности $U \subset X$, $U \ni x$ и локальной карты $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{\dim X}$ выполнено равенство $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$.

Эквивалентность кривых достаточно проверить для какой-то одной локальной карты. В самом деле, если c_1 и c_2 — две кривые на гладком многообразии X , проходящие через точку p , и если для некоторой локальной карты φ , область определения которой содержит p , имеем $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$, то и для всякой локальной карты ψ , область определения которой содержит p , выполнено равенство $(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0)$, так как $\varphi \circ c_i$ и $\psi \circ c_i$ отличаются на диффеоморфизм.

Определение 25.3. *Касательным пространством* к многообразию X в точке p называется множество классов эквивалентности гладких кривых, проходящих через p .

Касательное пространство к многообразию X в точке p обозначается $\mathcal{T}_p X$, а его элементы называются *касательными векторами в точке p* .

Определение 25.4. Если X и Y — гладкие многообразия и $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение, то *производной* отображения f в точке $p \in X$ называется отображение $f'(p): \mathcal{T}_p X \rightarrow \mathcal{T}_{f(p)} Y$, которое переводит класс эквивалентности кривой $c: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow X$ в класс эквивалентности кривой $f \circ c: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow Y$.

Разумеется, надо еще удостовериться в корректности этого определения (т. е. показать, что если кривые c_1 и c_2 эквивалентны, то эквивалентны и кривые $f \circ c_1$ и $f \circ c_2$). Это предоставляется читателю.

При таком определении производной следующее утверждение, являющееся для многообразий аналогом правила дифференцирования сложной функции (предложение 17.9), становится очевидным.

Предложение 25.5. Пусть X, Y и Z — гладкие многообразия, $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — гладкие отображения и $p \in X$. Тогда $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p)$.

До сих пор мы рассматривали касательное пространство просто как множество; на самом деле на нем можно ввести структуру векторного пространства. Это делается следующим образом.

Пространство $\mathcal{T}_p X$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие с пространством $\mathbb{R}^n$, где $n = \dim X$. Именно, пусть $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — локальная карта (здесь $U \ni p$ — координатная окрестность); тогда если касательный вектор $v \in \mathcal{T}_p X$ представлен кривой $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, то производная от отображения $\varphi \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, будучи линейным отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$, полностью определяется образом элемента $1 \in \mathbb{R}$; обозначим временно этот образ через $\tau_{U, \varphi}(v) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что и

обратно, всякий элемент $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет вид $\tau_{U,\varphi}(v)$, где v — элемент $\mathcal{T}_p X$, представленный кривой $t \mapsto \varphi^{-1}(a_1 t, \dots, a_n t)$, где φ — локальная карта, так что $\tau_{U,\varphi}: \mathcal{T}_p X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — действительно взаимно однозначное соответствие.

Если вместо U и φ воспользоваться другой координатной окрестностью $V \ni p$ с локальной картой $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, то имеем, очевидно,

$$\tau_{V,\psi}(v) = f'_{UV}(\tau_{U,\varphi}(v)), \quad (25.1)$$

где f_{UV} — отображение замены координат, связывающее (U, φ) и (V, ψ) .

Определим теперь сложение и умножение на число для элементов $\mathcal{T}_p X$ следующим образом: если $v, w \in \mathcal{T}_p X$, то их суммой назовем такой элемент $w \in \mathcal{T}_p X$, что $\tau_{U,\varphi}(w) = \tau_{U,\varphi}(u) + \tau_{U,\varphi}(v)$; если $v \in \mathcal{T}_p X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то через λv обозначим элемент $w \in \mathcal{T}_p X$, для которого $\tau_{U,\varphi}(w) = \lambda \cdot \tau_{U,\varphi}(v)$. Соотношение (25.1) показывает, что такое определение суммы касательных векторов и произведения касательного вектора на число не зависит от выбора U и φ .

Предупреждение 25.6. Изоморфизм между $\mathcal{T}_p X$ и $\mathbb{R}^n$, который мы установили, ни в каком смысле не является естественным. В общем случае не существует разумного способа отождествить между собой пространства $\mathcal{T}_x X$ при различных $x \in X$.

Теперь выясним, как производная записывается в координатах. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение многообразий, $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. Пусть $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Выберем в X координатную окрестность $U \ni x$ с локальной картой φ , а в Y — координатную окрестность $V \ni y$ с локальной картой ψ . Уменьшив при необходимости U , можно считать, что $f(U) \subset V$. Пусть отображение $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ записывается в виде

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Предположим, что касательный вектор $v \in \mathcal{T}_x X$ представлен кривой $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset X$, и пусть отображение $\varphi \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет вид $t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$. Тогда, очевидно,

$$\tau_{U,\varphi}(v) = (\gamma'_1(0), \dots, \gamma'_m(0))$$

и

$$\begin{aligned} \tau_{V,\psi}(Df(x)(v)) &= \left(\frac{\partial f_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))}{\partial t}, \dots, \frac{\partial f_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \gamma'_i(0), \dots, \sum \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \gamma'_i(0) \right) \end{aligned}$$

(частные производные берутся в точке $\varphi(x)$). Иными словами, вектор $\tau_{V,\psi}(f'(x)(v))$ получается из $\tau_{U,\varphi}(v)$ умножением слева на якобиан отображения $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, представляющего собой запись отображения f в локальных координатах. Стало быть, производная действительно является линейным отображением, и при этом в локальных координатах она совпадает с производной, определенной в лекции 17.

В качестве примера на эту теорию вычислим касательное пространство к грассманиану.

Если $\alpha \in G(k, n)$, условимся обозначать соответствующее этой точке k -мерное подпространство $V \subset \mathbb{R}^n$ через V_α (чтобы избежать записей наподобие $v \in \alpha \in G(k, n)$). Имея в виду это соглашение, можно описать касательные пространства к грассманиану следующим образом.

Предложение 25.7. Пусть $G(k, n)$ — грассманиан k -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$ и $\alpha \in G(k, n)$. Тогда касательное пространство $T_\alpha G(k, n)$ естественно изоморфно пространству линейных отображений $\text{Hom}(V_\alpha, \mathbb{R}^n/V_\alpha)$.

В формулировке этого предложения нуждаются в уточнении слова «естественно изоморфно». Существование изоморфизма между $T_\alpha G(k, n)$ и $\text{Hom}(V_\alpha, \mathbb{R}^n/V_\alpha)$ самоочевидно в силу того, что оба эти пространства имеют размерность $k(n - k)$. Чтобы в данной ситуации дать формальное определение *естественного* изоморфизма, необходимо, видимо, ввести понятие векторного расслоения, что в наши планы не входит. Неформально же естественность изоморфизма означает, что изоморфизм можно построить таким образом, чтоб он не зависел от выбора локальных координат на многообразии или каких-то дополнительных структур в пространствах (например, базисов или евклидовых структур). Ср. также предупреждение 25.6: различные касательные пространства к данному многообразию все изоморфны, но естественного изоморфизма между ними, как правило, нет.

Для доказательства предложения мы построим естественный гомоморфизм из $T_\alpha G(k, n)$ в $\text{Hom}(V_\alpha, \mathbb{R}^n/V_\alpha)$, после чего проверим, что он является изоморфизмом (последнее будет совсем просто).

Начнем с того, что опишем кривые на $G(k, n)$ в инвариантных терминах. Именно, рассмотрим отображение $\Phi: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k$, переводящее число t в набор векторов $(e_1)(t), \dots, (e_k)(t)$. Предположим, что векторы $(e_1)(t), \dots, (e_k)(t)$ линейно независимы при всяком t и что каждое из отображений $t \mapsto (e_j)(t)$ является гладким.

В этих условиях обозначим через $\alpha(t) \in G(k, n)$ точку грассманиана, соответствующую подпространству, порожденному векторами

$(e_1)(t), \dots, (e_k)(t)$; мы утверждаем, что отображение $t \mapsto \alpha(t)$ является гладкой кривой в грассманиане и что всякая гладкая кривая в грассманиане получается этой конструкцией (а если бы эти утверждения были неверны, то следовало бы пересмотреть определение локальных координат на грассманиане!).

В самом деле, первое из утверждений можно проверять локально, так что можно считать, что образ Φ лежит в координатной окрестности U_a для некоторого мультииндекса a . Представим набор $(e_1)(t), \dots, (e_k)(t)$ в виде $(k \times n)$ -матрицы $M(t)$; пусть $A(t)$ — ее $(k \times k)$ -минор, образованный столбцами, номера которых входят в мультииндекс a . Соответствие $t \mapsto A(t)^{-1}M(t)$ задает то же отображение из интервала в $G(k, n)$, что исходное отображение Φ , и очевидно, что локальные координаты точки $\alpha(t)$, являющиеся матричными коэффициентами (не всеми) матрицы $A(t)^{-1}M(t)$, гладко зависят от t . Обратно, пусть $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G = G(k, n)$ — гладкая кривая на грассманиане; уменьшив при необходимости ε , можно считать, что $c((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U_a$ для некоторого a . В локальных координатах отображение c — это $(k \times n)$ -матрица, у которой элементы гладко зависят от t , а строки линейно независимы при всех t ; остается обозначить строки через $(e_1(t), \dots, e_k(t))$, и мы получим искомое отображение Φ .

Пусть теперь наша кривая Φ при $t = 0$ проходит через точку $\alpha \in G(k, n)$; это означает, что векторы $e_1(0), \dots, e_k(0)$ порождают подпространство $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим линейное отображение $\varphi: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n/V_\alpha$, действующее по следующему правилу:

$$\lambda_1 e_1(0) + \dots + \lambda_k e_k(0) \mapsto (\lambda_1 e'_1(0) + \dots + \lambda_k e'_k(0)) \bmod V_\alpha \quad (25.2)$$

(штрихом обозначено дифференцирование по t).

Это отображение не зависит от выбора семейства реперов $e_1(t), \dots, e_k(t)$, представляющего кривую в грассманиане. В самом деле, пусть та же кривая задается семейством реперов $f_1(t), \dots, f_k(t)$; тогда существует такое гладкое отображение $A: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$, что $e(t) = A(t)f(t)$ для всех t (напомним, что через $GL_k(\mathbb{R})$ обозначается множество невырожденных $(k \times k)$ -матриц с действительными коэффициентами).

Положим $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$. Тогда

$$e'_i(0) = \sum a'_{ij}(0)f_j(0) + \sum a_{ij}(0)f'_j(0) \equiv \sum a_{ij}(0)f'_j(0) \bmod V_\alpha. \quad (25.3)$$

Рассмотрим вектор $v = \sum \lambda_i e_i(0) \in V_\alpha$. Если строить отображение с помощью базисов $e_i(t)$, то он перейдет в $\sum \lambda_i e'_i(0) \bmod V_\alpha$; если же поль-

зоваться базисами $f_i(t)$, то, коль скоро $v = \sum a_{ij}(0)\lambda_i f_j(0)$, имеем ввиду (25.3):

$$v \mapsto \sum a_{ij}(0)\lambda_i f'_j(0) \bmod V_\alpha = \sum \lambda_i e'_i(0) \bmod V_\alpha,$$

что совпадает с (25.2).

Покажем, что эквивалентным кривым, проходящим через α , соответствуют одинаковые линейные отображения из V_α в $\mathbb{R}^n/V_\alpha$. В самом деле, пусть c_1 и c_2 — такие кривые; уменьшив при необходимости их области определения, можно считать, что их образы лежат в $\alpha \in U_a$, где $a = (a_1, \dots, a_k)$ — мультииндекс. Будем, как и раньше, записывать наборы из k линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$ в виде $(k \times n)$ -матриц. Ввиду только что доказанного, соответствующие этим кривым линейные отображения не изменятся, если заменить каждое из семейств реперов на такое, что подматрица соответствующих $(k \times n)$ -матриц, образованная столбцами, номера которых входят в a , тождественно равна единичной. В этой ситуации, однако, образы базисных векторов в $\mathbb{R}^n$, номера которых *не* входят в a , образуют базис в $\mathbb{R}^n/V_\alpha$; в этом базисе матрица линейного отображения, соответствующего кривой, состоит из производных матричных элементов в столбцах с номерами вне a , так что эквивалентность кривых равносильна совпадению линейных отображений. Тем самым мы получили корректно определенное естественное отображение из $\mathcal{T}_\alpha G(k, n)$ в $\text{Hom}(V_\alpha, \mathbb{R}^n/V_\alpha)$. Его линейность и сюръективность очевидны, а ввиду совпадения размерностей это изоморфизм.

26. Касательные векторы, локальные кольца и векторные поля

Будем с этого момента считать, что все наши многообразия, гладкие отображения и пр. имеют класс гладкости C^∞ , если явно не оговорено противное. При таком ограничении формулировки освобождаются от громоздких оговорок; отметим еще, что всякое многообразие класса C^r , где $r \geq 1$, будет C^r -диффеоморфно многообразию класса C^∞ .

Мы дали определение касательного вектора, в котором участвовали локальные координаты (в определении эквивалентности кривых). Сейчас мы дадим равносильное определение того же объекта, от координат не зависящее.

Определение 26.1. Пусть X — гладкое многообразие и $p \in X$. *Ростком гладкой функции в точке p* называется класс эквивалентности

пар (f, U) , где $U \ni p$ — открытое множество и f — гладкая функция на U , относительно следующего отношения эквивалентности: пары (f, U) и (g, V) называются эквивалентными, если существует такое открытое множество $W \subset U \cap V$, $W \ni p$, что $f|_W = g|_W$.

Ростки функций можно (так же, как и сами функции) складывать и умножать: суммой ростков, представленных парами (f, U) и (g, V) , называется росток, представленный парой $(f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V}, U \cap V)$, а произведением этих ростков называется росток, представленный парой $(f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V}, U \cap V)$. Очевидно, что сумма и произведение ростков не зависят от выбора представителей в классе эквивалентности.

Определение 26.2. *Локальным кольцом* многообразия X в точке $p \in X$ называется множество ростков гладких функций в точке p с введенными выше операциями сложения и умножения. Локальное кольцо многообразия X в точке p обозначается $\mathcal{O}_{X,p}$ или (если из контекста ясно, о каком многообразии идет речь) просто $\mathcal{O}_p$.

Ясно, что всякое локальное кольцо любого n -мерного многообразия изоморфно локальному кольцу начала координат в $\mathbb{R}^n$.

Локальные кольца связаны с касательными векторами следующим образом. Пусть $v \in \mathcal{T}_p X$ — касательный вектор, представленный кривой $c: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow X$. Поставим ему в соответствие отображение $D_v: \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$(f, U) \mapsto (f \circ c)'(0)$$

(если не весь интервал $(-\varepsilon; \varepsilon)$ попадает при отображении c во множество U , надо заменить отображение c на его ограничение на $c^{-1}(U) \subset (-\varepsilon; \varepsilon)$; ясно, что полученная кривая определяет тот же касательный вектор). Можно сказать, что D_v сопоставляет функции f (точнее, ее ростку) производную f в точке p вдоль кривой, представляющей вектор v .

Поскольку и элементы $\mathcal{T}_p X$, и элементы $\mathcal{O}_{X,p}$ — классы эквивалентности, надо проверить, во-первых, что образ ростка функции при отображении D_v не зависит от выбора пары (f, U) , представляющей этот росток, и, во-вторых, что само отображение D_v не зависит от выбора кривой, представляющей касательный вектор v .

Первое из этих утверждений очевидно, а второе мы сейчас проверим.

Именно, пусть $\dim X = n$. Поскольку всякая точка $p \in X$ обладает окрестностью, диффеоморфной открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, а ро-

сток функции не меняется при ограничении функции на меньшее открытое подмножество, можно сразу считать, что $X = V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $p \in V$. Если $c: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow V$ — гладкая кривая, проходящая через точку p , записанная в координатах по формуле $t \mapsto (c_1(t), \dots, c_n(t))$, и (f, U) — представитель ростка функции в точке p , то по формуле производной сложной функции имеем

$$(f \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^n c'_i(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \quad (26.1)$$

Поскольку кривые c и $\tilde{c}$, для которых $c'_i(0) = \tilde{c}'_i(0)$ для всех i , определяют один и тот же касательный вектор, формула (26.1) показывает, что отображение $D_v: \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}$ действительно зависит только от касательного вектора v , а не от представляющей его кривой.

В формуле (26.1) положим $c'_i(0) = a_i$. Тогда отображение D_v запишется в виде

$$D_v: f \mapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \quad (26.2)$$

Поскольку для всякого набора чисел $(a_1, \dots, a_n)$ найдется кривая, для которой эти числа будут производными в нуле (например, кривая $t \mapsto (a_1 t, \dots, a_n t)$), и поскольку этот набор однозначно восстанавливается по отображению D_v (именно, $a_i = D_v(x_i)$), мы доказали следующее утверждение.

Предложение 26.3. Пусть X — гладкое многообразие размерности n , $x \in X$, $U \ni x$ — координатная окрестность, $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта и $p = \varphi(x)$. Тогда отображение $v \mapsto D_v$ задает изоморфизм между касательным пространством к X в точке x и множеством отображений из $\mathcal{O}_{X,x}$ в $\mathbb{R}$, заданных по формуле $f \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(p)$, где $a_i \in \mathbb{R}$ — константы.

Сокращенно отображение, заданное формулой (26.2), обозначают $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Доказанное предложение дает нам право отождествить касательные векторы с отображениями вида (26.2), что мы время от времени и будем делать.

Итак, касательные векторы — это «то, по чему можно дифференцировать». Покажем, что касательные векторы в точке p можно определить чисто алгебраически, исходя исключительно из локального кольца в этой точке.

Для начала заметим, что для всякого $v \in \mathcal{T}_p X$ отображение $D = D_v$ обладает, очевидно, следующими свойствами:

$$\begin{aligned} D(\lambda f + \mu g) &= \lambda D_v(f) + \mu D_v(g), \quad \text{если } \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ D(fg) &= f(p) \cdot D(g) + g(p) \cdot f; \\ D(\lambda) &= 0, \quad \text{если } \lambda \text{ — константа.} \end{aligned} \quad (26.3)$$

Обозначение 26.4. Множество отображений из $\mathcal{O}_p$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (26.3), обозначается $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$.

Оказывается, что и обратно, всякий элемент $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ имеет вид D_v для некоторого $v \in \mathcal{T}_p X$. Чтобы в этом убедиться, посмотрим повнимательнее на устройство локального кольца $\mathcal{O}_p$. Обозначим через $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ идеал, состоящий из ростков функций, обращающихся в нуль в точке p . Идеал $\mathfrak{m}_p$ называется *максимальным идеалом* локального кольца $\mathcal{O}_p$ (поскольку он и впрямь является его единственным максимальным идеалом). Пусть n — размерность нашего многообразия X ; тогда кольцо $\mathcal{O}_{X,p}$ изоморфно, как мы уже отмечали, кольцу $\mathcal{O}_{V,o}$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $o \in \mathbb{R}^n$ — начало координат. Далее будем писать $\mathcal{O}$ вместо $\mathcal{O}_{V,o}$ и $\mathfrak{m}$ вместо $\mathfrak{m}_{V,o}$.

Идеал $\mathfrak{m}$ содержит, в частности, ростки всех координатных функций $x_1, \dots, x_n$.

Предложение 26.5 (лемма Адамара). *В кольце $\mathcal{O}$ идеал $\mathfrak{m}$ порожден своими элементами $x_1, \dots, x_n$ (иными словами, для всякого $f \in \mathfrak{m}$ выполнено равенство $f = g_1 x_1 + \dots + g_n x_n$, где $g_1, \dots, g_n$ — какие-то элементы кольца $\mathcal{O}$).*

Доказательство. Пусть росток из $\mathfrak{m}$ представлен парой (f, U) . Тогда для некоторого $r > 0$ замкнутый шар $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ содержится в U . Поскольку $f(0) = 0$, для всякого $x \in U$ выполнено равенство

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n) dt = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt.$$

Положим $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$. Остается убедиться, что функции g_i гладки (класса C^∞) во внутренности шара B , т.е. что можно дифференцировать под знаком интеграла; это следует, например, из теоремы Лебега об ограниченной сходимости и формулы Лагранжа. $\square$

Заметим, что для аналитических функций лемма Адамара совсем очевидна (перегруппируйте слагаемые в степенном ряде для f).

Пусть $\mathcal{O}_p$ — локальное кольцо точки p . Через $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ обозначается, как водится, идеал кольца $\mathcal{O}_p$, состоящий из всевозможных сумм вида $f_1 g_1 + \dots + f_m g_m$, где все f_i и g_i лежат в $\mathfrak{m}_p$ (число слагаемых произвольно). Поскольку и $\mathfrak{m}_p$, и $\mathfrak{m}_p^2$ являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, можно рассмотреть факторпространство $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, а также сопряженное к нему пространство $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.

Предложение 26.6. Пусть X — гладкое многообразие, $p \in X$. Тогда векторные пространства $\mathcal{T}_p X$, $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ естественно изоморфны.

Слово «естественно» в формулировке этого предложения означает, что отображения, устанавливающие изоморфизмы, не зависят от выбора локальных координат.

Доказательство. Сначала установим изоморфизм между пространствами $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ и $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Это — чистая алгебра. Именно, пусть $D: \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$ — элемент пространства $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Заметим, что D является тождественным нулем на $\mathfrak{m}_p^2 \subset \mathcal{O}_p$. В самом деле, если $f, g \in \mathfrak{m}_p$, то $D(fg) = g(p)D(f) + f(p)D(g) = 0$, поскольку $f(p) = g(p) = 0$. Ограничим D на $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_p$ — получится линейный функционал на $\mathfrak{m}_p$; поскольку, в силу вышесказанного, он обращается в нуль на $\mathfrak{m}_p^2$, мы можем рассматривать его как линейный функционал на $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, то есть как элемент пространства $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Обозначим этот элемент через $i(D)$; тем самым мы определили гомоморфизм $i: \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Обратное, пусть $\xi \in (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Будем рассматривать ξ как линейный функционал на $\mathfrak{m}_p$, являющийся тождественным нулем на $\mathfrak{m}_p^2$. Определим теперь отображение $D(\xi): \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $D(\xi): f \mapsto \xi(f - f(p))$ (поскольку функция $f - f(p)$ обращается в нуль в точке p , правая часть определена). Покажем, что $D(\xi)$ удовлетворяет условиям (26.3) и тем самым лежит в $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. В проверке нуждается только второе из этих условий («формула Лейбница»):

$$\begin{aligned} D(\xi)(fg) &= \xi(fg - f(p)g(p)) = \\ &= \xi((f - f(p))(g - g(p)) + f(p)(g - g(p)) + g(p)(f - f(p))) = \\ &= \xi((f - f(p))(g - g(p)) + f(p)\xi(g - g(p)) + g(p)\xi(f - f(p))) = \\ &= f(p)D(\xi)(g) + g(p)D(\xi)(f) \end{aligned}$$

(первое слагаемое в третьей строке равно нулю, поскольку $(f - f(p)) \times (g - g(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$). Осталось проверить, что гомоморфизмы i и D взаимно обратны; это предоставляется читателю.

Теперь установим изоморфизм между $\mathcal{T}_p X$ и $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$. Тут нам уже понадобится лемма Адамара.

Заметим для начала, что в процессе доказательства предложения 26.3 мы построили естественное отображение $v \mapsto D_v$, задающее гомоморфизм из $\mathcal{T}_p X$ в $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$, и даже установили, что этот гомоморфизм является мономорфизмом. Чтобы установить его эпиморфность (то есть что всякий элемент из $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ имеет вид D_v для некоторого касательного вектора v), воспользуемся локальными координатами; перейдя к локальной карте, можно, как и раньше, считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $p = o$ — начало координат. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в доказательстве леммы Адамара.

Итак, пусть $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$. В силу третьего из условий (26.3) имеем $D(f) = D(f - f(o))$; запишем, по лемме Адамара, $f - f(o) = \sum x_i g_i$. Беря частные производные от обеих частей этого равенства, легко видеть, что $g_i(o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(o)$. Теперь запишем:

$$\begin{aligned} Df &= D(f - f(o)) = \sum D(x_i g_i) = \sum (x_i(o) D(g_i) + g_i(o) D(x_i)) = \\ &= \sum D(x_i) g_i(o) = \sum D(x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(o). \end{aligned}$$

Полагая $D(x_i) = a_i$, получаем тем самым, что $D = D_v$, где $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, что и завершает доказательство. $\square$

Коль скоро мы нашли алгебраическое определение касательного пространства, стоит выяснить, как при этом определении записывается производная гладкого отображения.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, и пусть $p \in X$ и $q = f(p) \in Y$. Отображение f индуцирует гомоморфизм локальных колец $f^*: \mathcal{O}_{Y,q} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$, определенный следующим образом: ростку из $\mathcal{O}_{Y,q}$, представленному парой (h, U) , ставится в соответствие росток из $\mathcal{O}_{X,p}$, представленный парой $(h \circ f, f^{-1}(U))$ (общий принцип: отображение пространств индуцирует гомоморфизм колец функций, направленный в противоположную сторону). Далее, $f^*(\mathfrak{m}_q) \subset \mathfrak{m}_p$ (если функция h обращается в нуль в точке $q = f(p)$, то функция $h \circ f$ обращается в нуль в точке p). Поскольку f^* — гомоморфизм колец, отсюда следует, что $f^*(\mathfrak{m}_q^2) \subset \mathfrak{m}_p^2$. Следовательно, гомоморфизм f^* индуцирует $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2 \rightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$. Сопряженное к этому линейному отображению обозначим $\mathcal{T}_p f: (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \rightarrow (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$. Как мы установили в предложении 26.6, пространства $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $(\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$ суть касательные пространства $\mathcal{T}_p X$ и $\mathcal{T}_q Y$. Так вот, оказывается, что при этом отождествлении гомоморфизм $\mathcal{T}_p f$ — это то же самое отобра-

жение, что знакомая нам производная f в точке p . Более формально это утверждение запишется так:

Предложение 26.7. Если обозначить изоморфизмы из предложения 26.6 через $\alpha_p: \mathcal{T}_p X \rightarrow (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ и $\alpha_q: \mathcal{T}_q Y \rightarrow (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$, то нижеследующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_p X & \xrightarrow{\alpha_p} & (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* \\ f_* \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}_p f \\ \mathcal{T}_q Y & \xrightarrow{\alpha_q} & (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^* \end{array}$$

Доказательство, состоящее в бесхитростном прослеживании изоморфизмов, лучше проделать самостоятельно: ничего, кроме усидчивости, для этого не потребуется.

До сих пор мы занимались индивидуальными касательными векторами; поработаем теперь с их семействами — векторными полями. Векторным полем на гладком многообразии X называется отображение v , которое каждой точке $p \in X$ ставит в соответствие касательный вектор $v_p \in \mathcal{T}_p X$, «гладко зависящий от p ».

Как же придать точный смысл словам, взятым в кавычки? Как и в случае с функциями, гладкость нужно определять локально. Пусть теперь $U \subset X$ — координатная окрестность и $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ — локальная карта (мы обозначили $n = \dim X$). Тогда, как мы видели на прошлой лекции, касательный вектор в точке $p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$, где $(x_1, \dots, x_n) \in V$, можно записать в виде $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; значит, ограничение семейства касательных векторов на U можно записать в этой локальной карте в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Определение 26.8. Семейство касательных векторов на n -мерном многообразии X называется *векторным полем*, если для любой точки $p \in X$ существуют такие координатная окрестность $U \ni p$ и локальная карта $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, что при записи в этой карте семейства в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, функции $a_1, \dots, a_n$ являются гладкими.

Легко видеть, что при этом функции a_i будут гладкими при записи векторного поля в виде $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, в *любых* локальных координатах. В самом деле, пусть открытое подмножество $U \subset X$ входит в область определения двух локальных карт $\varphi_1: U \rightarrow V_1$ и $\varphi_2: U \rightarrow V_2$. Если обо-

значить через $(x_1, \dots, x_n)$ координаты в том $\mathbb{R}^n$, в котором лежит V_1 , и через $(y_1, \dots, y_n)$ — в том, в котором лежит U_2 , то «функция перехода» $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: U_2 \rightarrow U_1$ задает $(x_1, \dots, x_n)$ как функцию от $(y_1, \dots, y_n)$. Если теперь в y -координатах семейство касательных векторов записывается в виде $\sum b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, то для произвольной гладкой функции f имеем (по правилу дифференцирования сложной функции)

$$\begin{aligned} \sum_i b_i(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} &= \sum_i b_i(y_1, \dots, y_n) \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \\ &= \sum_j \left(\sum_i b_i(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

где $a_j = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial y_i} b_i(y_1, \dots, y_n)$. В матричной записи это выглядит как $a \circ \psi = Jb$, где J — матрица Якоби $\|\partial x_j / \partial y_i\|$. Поскольку J — матрица из гладких функций с необращающимся в нуль определителем, из правила Крамера следует, что функции $a_1, \dots, a_n$ гладки тогда и только тогда, когда гладки $b_1, \dots, b_n$, что и требовалось установить.

Если продифференцировать функцию по касательному вектору, то получится число; если продифференцировать функцию по векторному полю, то есть семейству касательных векторов, то получится функция:

Определение 26.9. Пусть v — векторное поле на многообразии X , f — гладкая функция на X . Производной функции f по векторному полю v называется функция $v(f)$, действующая по правилу $x \mapsto v_x(\mathbf{f}_x)$, где $\mathbf{f}_x \in \mathcal{O}_x$ — росток функции f в точке x .

Если в локальных координатах векторное поле v записывается в виде $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, то в этих же координатах имеем $v(f) = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$; так как функции a_i гладки, функция $v(f)$ также гладка, так что дифференцирование по векторному полю переводит гладкие функции в гладкие.

В следующем (очевидном) предложении используется такое обозначение: $\mathcal{O}(X)$ — кольцо гладких функций на гладком многообразии X .

Предложение 26.10. Если X — гладкое многообразие, $f, g \in \mathcal{O}(X)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, v — векторное поле на X , то

$$\begin{aligned} v(\lambda f + \mu g) &= \lambda v(f) + \mu v(g); \\ v(fg) &= v(f) \cdot g + f \cdot v(g). \end{aligned}$$

Свойства дифференцирования по векторному полю, перечисленные в предложении 26.10, лежат в основе следующего определения.

Определение 26.11. Пусть A — коммутативное кольцо¹ и $B \subset A$ — его подкольцо. Отображение $D: A \rightarrow A$ называется *дифференцированием кольца A над B* (говорят еще: *B -дифференцированием кольца A*), если при любых $f, g \in A$ и $c \in B$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} D(f \pm g) &= D(f) \pm D(g); \\ D(fg) &= D(f) \cdot g + f \cdot D(g); \\ D(c) &= 0. \end{aligned}$$

Множество дифференцирований A над B обозначается $\text{Der}_B(A)$.

Первое из условий в этом определении означает, что D — эндоморфизм аддитивной группы кольца, второе условие называется тождеством Лейбница, а третье означает, что элементы подкольца B играют роль констант; из этого условия и тождества Лейбница немедленно следует, что $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$, как только $\lambda, \mu \in B$ и $f, g \in A$. Используя введенную терминологию, можно пересказать предложение 26.10 следующим образом: всякое векторное поле на гладком многообразии X является дифференцированием $\mathcal{O}(X)$ над $\mathbb{R}$ (подразумевается, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathcal{O}(X)$ в качестве подкольца, состоящего из постоянных функций).

Интересно, что верно и обратное (и тем самым векторные поля на многообразии можно определить чисто алгебраически):

Предложение 26.12. Пусть X — гладкое многообразие. Тогда для всякого дифференцирования $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X), \mathbb{R})$ существует и единственно векторное поле v на X , для которого $v(f) = D(f)$ при всех $f \in \mathcal{O}(X)$.

Доказательство. Начнем с технической леммы.

Лемма 26.13. Пусть U — открытое подмножество в гладком многообразии X , $p \in U$. Тогда существуют такие открытое множество $U_1 \subset U$, содержащее p , и гладкая функция $f \in \mathcal{O}(X)$, что $\text{supp } f \subset U$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in U_1$.

Доказательство леммы. Заметим, что для всякого $a > 0$ существует возрастающая C^∞ -функция $\varphi_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\varphi_a(x) = 0$ при

¹В нашем курсе слово «кольцо» всегда означает «кольцо с единицей», а «подкольцо» — «подкольцо, содержащее единицу».

$x \leq 0$ и $\varphi_a(x) = 1$ при $x \geq a$. В самом деле, пусть ψ_1 — неотрицательная C^∞ -функция на $\mathbb{R}$, равная нулю вне $(0; +\infty)$ и положительная на $(0; +\infty)$ (см. предложение 23.1). Положим $\psi_1(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$; тогда искомая функция φ_a получается из ψ_1 линейной заменой переменной и умножением на константу.

Если U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, то пусть B — замкнутый шар с центром в p , содержащийся в U , и $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная функция класса C^∞ , равная нулю вне внутренности шара B ; положим $a = \mu(p)/2$; если φ_a — функция из леммы 26.13, то $\varphi_a \circ \mu$ — искомая функция на U , носитель которой компактен и содержится в B . В общем случае, уменьшая при необходимости U , можно считать, что U содержится в какой-то координатной окрестности; тогда ввиду только что доказанного существует искомая функция на U , имеющая компактный носитель. Следовательно, ее продолжение нулем на все X также будет C^∞ -функцией. $\square$

Следствие 26.14. *Всякий элемент локального кольца $\mathcal{O}_p$, где p — точка на гладком многообразии X , является ростком некоторой гладкой функции, определенной на всем многообразии.*

Доказательство следствия. Пусть элемент кольца $\mathcal{O}_p$ представлен парой (f, U) и $h \in \mathcal{O}(X)$ — функция, существование которой утверждается леммой. Функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x)h(x), & x \in U; \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

является, очевидно, гладкой на всем X и имеет тот же росток в p , что и f . $\square$

Теперь можно перейти к доказательству предложения. Пусть $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X))$. Для всякой $p \in X$ определим касательный вектор $v_p \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ так: поскольку всякий элемент $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_p$ является, по следствию 26.14, ростком какой-то функции $f \in \mathcal{O}(X)$, положим $v_p(\mathbf{f}) = D(f)(p)$. Условия (26.3) при этом выполнены с очевидностью, но надо проверить, что определение отображения v_p корректно, то есть что $D(f)(p)$ действительно зависит только от ростка функции f в точке p . Иными словами, надо убедиться, что $D(f)(p) = 0$, если f тождественно равно нулю на некотором открытом множестве $U \ni p$. Это делается так: пусть h — функция, существование которой утверждается леммой 26.13; тогда $fh = 0$, и имеем $0 = D(fh) = D(f) \cdot h + f \cdot D(h)$; беря значение в точке p , получаем $0 = D(f)(p) \cdot h(p) = D(f)(p)$, что и утверждалось.

Стало быть, мы построили по дифференцированию $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}(X))$ семейство касательных векторов $\{v_p\}_{p \in X}$. Осталось убедиться, что это семейство гладко зависит от p ; это мы сделаем с помощью локальных координат. Именно, пусть в локальных координатах наше семейство записывается (на некотором открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$, диффеоморфном координатной окрестности) в виде $\sum a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$; надо проверить, что функции a_i гладки. Если бы «координатные функции» x_i продолжались до гладких функций на всем X , то делать было бы совсем нечего, так как мы бы тогда имели право написать $D(x_i) = a_i \in \mathcal{O}(X)$, и функции a_i оказываются автоматически гладкими. К сожалению, такое продолжение возможно не всегда (например, ничто не мешает выбрать локальные координаты так, чтобы они стремились к бесконечности на границе координатной окрестности), так что придется еще раз применить следствие 26.14. Именно, для произвольной точки $p \in U$ существуют функции $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, продолжающиеся до гладких функций на всем X и совпадающие с $x_1, \dots, x_n$ в некоторой окрестности $U_1 \ni p$. Теперь функции $D(\tilde{x}_i)$ гладки на всем X , и при этом функции a_i совпадают с $D(\tilde{x}_i) \in \mathcal{O}(X)$ на множестве $U_1 \ni p$ и, стало быть, гладки на этом множестве. Раз функции a_i гладки в окрестности произвольной точки $p \in U$, они гладки всюду на U .

Итак, мы показали, что всякое $\mathbb{R}$ -дифференцирование кольца $\mathcal{O}_X$ происходит из некоторого векторного поля. Для завершения доказательства надо еще проверить, что разным векторным полям соответствуют разные дифференцирования; сделайте это самостоятельно. $\square$

Коль скоро у нас есть чисто алгебраическое определение векторных полей, с векторными полями можно производить алгебраические манипуляции. Вот важный пример.

Напомним, что *коммутатором* двух эндоморфизмов E_1 и E_2 абелевой группы A называется отображение $[E_1, E_2]: x \mapsto E_1(E_2(x)) - E_2(E_1(x))$.

Предложение 26.15. Пусть A — коммутативное кольцо, $B \subset A$ — его подкольцо. Если D_1 и D_2 — дифференцирования кольца A над B , то и их коммутатор $[D_1, D_2]$ является дифференцированием A над B .

Бесхитростная проверка оставляется в качестве упражнения.

Поскольку векторные поля — частный случай дифференцирований, для двух векторных полей на многообразии можно также определить коммутатор. Давайте выясним, как он записывается в локальных координатах.

Пусть $v_1 = \sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $v_2 = \sum b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Посмотрим, как их коммутатор действует на функцию f . Сначала найдем $v_1(v_2(f))$:

$$\begin{aligned} v_1(v_2(f)) &= v_1\left(\sum b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_i v_1(b_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i \cdot v_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \\ &= \sum_{i,k} a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k} b_i a_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}. \end{aligned}$$

Очевидно, формула для $v_2(v_1(f))$ отличается от вышеприведенной только тем, что в ней меняются местами буквы a и b , причем слагаемые со вторыми производными в обеих формулах совпадают (тут используется симметрия вторых частных производных!). Вычитая эти два равенства и группируя слагаемые с $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ с одинаковыми i , получаем:

$$v_1(v_2(f)) - v_2(v_1(f)) = \sum_i \left(\sum_k a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Стало быть, в координатах коммутатор векторных полей записывается так:

$$\left[\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \sum_i \left(\sum_k a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (26.4)$$

Дифференцирования любого кольца обладают следующими свойствами.

Предложение 26.16. *Если A — коммутативное кольцо и $B \subset A$ — подкольцо, то для всяких $D_i \in \text{Der}_B(A)$ выполнены такие тождества:*

$$\begin{aligned} [D_1 \pm D_2, D_3] &= [D_1, D_3] \pm [D_2, D_3]; \\ [D_1, D_2] &= -[D_2, D_1]; \\ [[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] &= 0. \end{aligned} \quad (26.5)$$

В частности, эти тождества выполнены, если D_1 , D_2 и D_3 — векторные поля на многообразии.

Доказательство, сводящееся к непосредственной проверке, оставляется в качестве очередного упражнения.

Тождество (26.5) называется *тождеством Якоби*; в совокупности тождества из предложения 26.16 показывают, что векторные поля на многообразии образуют *алгебру Ли*.

27. Фазовые кривые и фазовые потоки

На прошлой лекции мы выяснили алгебраический смысл векторных полей; займемся геометрическим.

Все многообразия, векторные поля, диффеоморфизмы и т. п. будем считать принадлежащими к классу C^∞ ; в конце лекции мы остановимся на случае конечной гладкости.

Определение 27.1. Пусть v — векторное поле на многообразии X . *Фазовой кривой* векторного поля v называется гладкое отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, где $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, удовлетворяющее следующему условию: для всякой точки $t \in I$ выполнено равенство $\varphi'(t) \left(\frac{d}{dt} \right) = v(\varphi(t))$.

Иначе можно сказать так: гладкое отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ является фазовой кривой, если для всякого $t \in I$ кривая f представляет касательный вектор $v(\varphi(t))$.

Запишем условие «быть фазовой кривой» в координатах. Пусть в локальной карте $U \subset \mathbb{R}^n$ векторное поле записывается в виде $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда отображение $\varphi: I \rightarrow U$, заданное формулой $t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, будет фазовой кривой в том и только том случае, когда $d\varphi_i/dt = v_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ для всех i . Иными словами, фазовая кривая такого векторного поля — не что иное, как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_1(t) = f_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \dots, \varphi'_n(t) = f_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)). \quad (27.1)$$

Обратите внимание, что по сравнению с общим случаем, о котором шла речь во втором семестре (лекция 21), правая часть не зависит от t ; такие уравнения называют *автономными*.

Из общих фактов о дифференциальных уравнениях, установленных в лекции 21, вытекает, что через каждую точку проходит фазовая кривая и что любые две фазовые кривые $\varphi_1: I_1 \rightarrow X$ и $\varphi_2: I_2 \rightarrow X$, значения которых совпадают в некоторой точке $t \in I_1 \cap I_2$, совпадают всюду на $I_1 \cap I_2$.

Следующее очевидное, но важное свойство фазовых кривых мы выделим в отдельное предложение.

Предложение 27.2. Если $\varphi: I \rightarrow X$ — фазовая кривая векторного поля v , и если $\tau \in \mathbb{R}$, то отображение $\varphi_1: t \mapsto \varphi(t + \tau)$ также является фазовой кривой поля v .

Теорема 21.1 обеспечивает существование фазовой кривой, проходящей через данную точку и определенной локально — на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. На все $\mathbb{R}$ она при этом продолжаться не обязана: если рассмотреть на $\mathbb{R}$ векторное поле $x^2(d/dx)$, сиречь уравнение $x' = x^2$, то легко видеть, что его фазовая кривая φ , для которой $\varphi(0) = a > 0$, имеет вид $t \mapsto a/(1 - at)$, и это отображение нельзя продолжить за пределы интервала $(-\infty; 1/a)$: на его границе оно «уходит на бесконечность». Следующее предложение описывает ситуацию, в которой такой уход на бесконечность невозможен.

Предложение 27.3. Пусть v — векторное поле с компактным носителем на многообразии X . Тогда всякая фазовая кривая поля v продолжается до фазовой кривой, определенной на всем $\mathbb{R}$.

(Носителем векторного поля v называется — как и в случае функций — замыкание множества $\{x \in X : v(x) \neq 0\}$.)

Условию этого предложения удовлетворяет, в частности, всякое векторное поле на компактном многообразии.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (27.1), определенное в области $U \subset \mathbb{R}^n$. Из леммы 21.6 и доказательства теоремы о существовании решения дифференциального уравнения следует, что если $B_r \subset U$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x_0 , и если $M = \sup_{x \in B_r} \|v(x)\|$, то существует проходящая через x_0 фазовая кривая, определенная на интервале длины $2r/M$ с центром в точке x_0 (так как все ломаные Эйлера, построенные от точки x_0 на данном интервале, будут лежать в B_r). Следовательно, для всякого $x_0 \in X$ существуют окрестность $V \ni x_0$ и число $\varepsilon_V > 0$, обладающие тем свойством, что при всяком $x \in V$ существует фазовая кривая, определенная на интервале длиной ε_V с центром в точке x . Так как носитель поля v компактен, можно выбрать конечное число таких окрестностей, его покрывающих; обозначим через ε наименьшее из чисел ε_V , соответствующих этим окрестностям. Так как всякая фазовая кривая, проходящая через точку x , для которой $v(x) = 0$, заведомо продолжается на все $\mathbb{R}$ (ибо эта «кривая» — постоянное отображение со значением x), получаем, что всякая фазовая кривая $\varphi: I \rightarrow X$, определенная в точке $t_0 \in I$, продолжается на $I \cup (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$. Продолжаемость на все $\mathbb{R}$ следует отсюда с очевидностью. $\square$

Из доказанного предложения вытекает интересное следствие. Начнем с определения.

Определение 27.4. Пусть X — гладкое многообразие. Однопараметрической группой диффеоморфизмов многообразия X называется

гладкое отображение $G: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, обладающее следующими свойствами:

(1) для каждого $t \in \mathbb{R}$ отображение $g_t: X \rightarrow X$, определенное по формуле $g_t(x) = G(t, x)$, является диффеоморфизмом;

(2) для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $g_{t_1+t_2} = g_{t_1} \circ g_{t_2}$.

Иными словами, $\mathbb{R}$ (как аддитивная группа) действует на X диффеоморфизмами; условие гладкости отображения G означает, что диффеоморфизм g_t «гладко зависит» от числа t .

Предложение 27.5. Пусть v — векторное поле с компактным носителем на многообразии X . Тогда существует и единствен фазовый поток $G: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, обладающий тем свойством, что для всякого $x \in X$ отображение $t \mapsto g_t(x)$ является фазовой кривой поля v .

(Грубо говоря, это означает, что орбиты действия $\mathbb{R}$ являются фазовыми кривыми.)

Доказательство. Единственность очевидна из части 2 теоремы 21.1. Для доказательства существования положим $G(t, x) = g_t(x) = \varphi(t)$, где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow X$ — фазовая кривая, для которой $\varphi(0) = x$. Поскольку ввиду предложения 27.2 отображение $\varphi_1: t \mapsto \varphi(t_1 + t)$ также является фазовой кривой, для которой $\varphi_1(0) = g_{t_1}(x)$, имеем $g_{t_1+t_2}(x) = g_{t_2}(g_{t_1}(x))$, так что отображение G является действием $\mathbb{R}$ на X . Остается проверить, что G гладко. Это следует из теоремы о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий, доказательство которой мы опустим; его можно прочитать в книге А. Картана «Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы» (М.: Мир, 1971) или В. И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (любое издание). $\square$

Следствие 27.6. Если X — компактное многообразие, то имеется естественное взаимно однозначное соответствие между векторными полями и фазовыми потоками на X .

Следствие 27.6 является полезным техническим средством для построения диффеоморфизмов с желаемыми свойствами.

Если носитель векторного поля некомпактен, то, как мы видели, фазовые кривые могут не продолжаться на все $\mathbb{R}$, и в этом случае фазовый поток построить нельзя. Тем не менее всегда существует его суррогат: локальный фазовый поток.

Предложение 27.7. Если v — векторное поле на многообразии X и $x \in X$, то существуют окрестность $U \ni x$, число $\varepsilon > 0$ и гладкое отображение $G: (-\varepsilon; \varepsilon) \times U \rightarrow X$, обладающее следующими свойствами:

- (1) для всякой точки $p \in U$ существует фазовая кривая $\varphi: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow X$, для которой $\varphi(0) = p$;
- (2) если φ — фазовая кривая из пункта (1), то для всякого $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ имеем $\varphi(t) = G(t, p) = g_t(p)$;
- (3) если $|t_1| < \varepsilon$, $|t_2| < \varepsilon$ и $|t_1 + t_2| < \varepsilon$, то для всякого $p \in U$ имеем $g_{t_1+t_2}(p) = g_{t_2}(g_{t_1}(p))$.

Доказательство этого предложения можно спокойно предоставить читателю.

Понятие фазового потока позволяет выявить геометрический смысл коммутатора векторных полей. Именно, оказывается, что коммутатор измеряет, в какой степени коммутируют друг с другом соответствующие (локальные) фазовые потоки. Вот точная формулировка.

Предложение 27.8. Пусть v и w — векторные поля на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ — соответствующие им локальные фазовые потоки в окрестности точки p . Положим $z = [w, v]$, и пусть $\{f_t\}$ — локальный фазовый поток, соответствующий полю z . Тогда

$$g_s h_t (g_s)^{-1} h_t^{-1} (p) = f_{st}(p) + o(s^2 + t^2) \quad \text{при } s, t \rightarrow 0,$$

причем это о локально равномерно по p .

Доказательство. Заметим, что соответствие между фазовыми потоками и векторными полями можно записать в таком виде (подразумевается, что поток $\{g_t\}$ соответствует полю $\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; мы пишем v вместо $(v_1, \dots, v_n)$):

$$g_t(q) = q + tv(q) + o(t);$$

ясно, что o в этой формуле можно выбрать равномерным по q , если считать, что q содержится в некоторой окрестности точки p . Поэтому наше утверждение равносильно такому:

$$g_s h_t g_{-s} h_{-t}(p) = p + st \left(\sum_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j - \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j \right) \right) + o(s^2 + t^2). \quad (27.2)$$

Положим $\varphi(s, t) = g_s h_t (g_s)^{-1} h_t^{-1} (p)$. Формула (27.2), которую нам надо доказать, — это формула Тейлора для отображения φ в нуле. Очевидно, $\varphi(s, 0) = \varphi(0, t) = p$ при любых s и t . Следовательно, в ряде Тейлора для φ отсутствуют слагаемые, в которых присутствует только s или только t . Поэтому в степени 1 в разложении φ ничего нет, а в степени 2 присутствует только слагаемое с st ; чтобы завершить доказательство, надо только найти один n -мерный вектор-коэффициент при st . Вместо того, чтобы в лоб считать $\partial^2 \varphi / \partial s \partial t$, многократно применяя формулу

для производной сложной функции, поступим так, как в таких случаях все и делают: будем подставлять ряды Тейлора один в другой, как если бы они сходились к нашим функциям. Писанины при этом будут гораздо меньше, а формулы для коэффициентов ряда Тейлора заведомо получатся верные.

При этом все слагаемые степени ≤ 2 надо, естественно, выписать, а слагаемые степени > 2 можно отбрасывать (на разложение до второго порядка включительно они не повлияют). Специфика нашей функции φ позволяет добиться еще одного упрощения: можно отбрасывать и все слагаемые с s^2 или t^2 . В самом деле, по ходу преобразований они могут дать либо слагаемое степени, большей 2, которое мы все равно отбросим, либо слагаемые с s^2 или t^2 , про которые мы знаем заранее, что в итоге они сократятся.

Имея все это в виду, приступим к выкладкам:

$$h_{-t}(p) = p - tw(p) + O(t^2) = p - tw(p)$$

(мы отбросили $O(t^2)$, как и обещали);

$$\begin{aligned} g_{-s}h_{-t}(p) &= p - tw(p) - sv(p - tw(p)) = \\ &= p - tw(p) - s\left(v(p) - t \sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j\right) = p - tw(p) - sv(p) + st \sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j \end{aligned}$$

(мы применили формулу Тейлора к v ; во внутренних скобках опять отброшено $O(t^2)$). Далее,

$$\begin{aligned} h_t g_{-s} h_{-t}(p) &= p - tw(p) - sv(p) + st \sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j + tw(p - tw(p) - sv(p)) = \\ &(\text{во внутренних скобках сразу отброшено слагаемое с } st) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p - tw(p) - sv(p) + st \sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j + tw(p) + t^2(\dots) - \\ &\quad - st \sum \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j + tO(s^2 + t^2) = \\ &= p - sv(p) + st \underbrace{\left(\sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j - \sum \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j \right)}_C + o(s^2 + t^2) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} g_s h_t g_{-s} h_{-t}(p) &= p - sv(p) + stC + sv(p - sv(p) + stC) + O(s^2) = \\ &= p - sv(p) + stC + sv(p) - s^2(\dots) + s^2 tC(\dots) + (\dots) = \\ &= p + st \left(\sum \frac{\partial v}{\partial x_j} w_j - \sum \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j \right) + o(s^2 + t^2). \end{aligned}$$

Доказательство закончено. $\square$

У относящегося к инфинитезимальной ситуации предложения 27.8 есть полезное глобальное следствие.

Предложение 27.9. *Если коммутатор векторных полей равен нулю, то соответствующие им (локальные или глобальные) фазовые потоки коммутируют.*

Подробнее: пусть X — гладкое многообразие, v и w — такие векторные поля на X , что $[v, w] = 0$. Если $\{g_t\}$ и $\{h_t\}$ — глобальные (соотв. локальные) фазовые потоки, соответствующие полям v и w , то для любых s и t (соотв. для любых достаточно малых s и t) выполнено равенство $g_s \circ h_t = h_t \circ g_s$.

Доказательство. Поскольку для всякого натурального N выполнено соотношение $(g_{s/N})^N = g_s$, достаточно показать, что коммутируют $g_{s/N}$ и $h_{t/N}$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Поэтому можно считать, что отображения g_s и h_t не выводят данную точку p за пределы координатной окрестности и, тем самым, что X — это область в $\mathbb{R}^n$.

Чтобы показать, что $g_s(h_t(p)) = h_t(g_s(p))$, зададимся целым положительным числом k . Из предложения 27.8 следует, что для любой точки q из этой окрестности выполнено соотношение

$$\|g_{s/k}(h_{t/k}(p)) - h_{t/k}(g_{s/k}(p))\| = o(1/k^2) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (27.3)$$

причем o равномерно по q . Чтобы перейти от

$$g_s h_t = \underbrace{g_{s/k} \cdots g_{s/k}}_k \underbrace{h_{t/k} \cdots h_{t/k}}_k (p)$$

к

$$h_t g_s = \underbrace{h_{t/k} \cdots h_{t/k}}_k \underbrace{g_{s/k} \cdots g_{s/k}}_k (p),$$

надо k^2 раз переставить $g_{s/k}$ и $h_{t/k}$. Стало быть, $\|g_s(h_t(p)) - h_t(g_s(p))\|$ оценивается сверху суммой k^2 слагаемых, каждое из которых есть $o(1/k^2)$ ввиду (27.3). Устремляя k к бесконечности, получаем, что эта разность равна нулю, что и завершает доказательство. $\square$

В заключение отметим, что все сказанное в этой лекции верно и для векторных полей класса C^r с любым $r \geq 1$; соответствующие фазовые потоки будут, естественно, тоже иметь гладкость C^r . Предложения 27.8 и 27.3 будут верны даже при $r = 1$: хотя в такой гладкости определение коммутатора векторных полей как коммутатора дифференцирований кольца гладких функций дать уже невозможно, формула 26.4 имеет смысл, и можно именно ее взять в качестве определения коммутатора.

28. Интегрирование плотностей

Поставим себе задачу проинтегрировать гладкую функцию по многообразию таким образом, чтобы результат не зависел от выбора локальных координат. Чтобы выделить основную трудность, предположим, что носитель функции f на многообразии X содержится в одной координатной окрестности. В локальных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ можно написать

$$\int_X f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (28.1)$$

но если $(y_1, \dots, y_n)$ — другие локальные координаты, действующие в той же окрестности, то из формулы замены переменных вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \dots, y_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n, \end{aligned} \quad (28.2)$$

и это не совпадает с $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$. Стало быть, просто так интегрировать функции по многообразию не получится: формула замены переменной подсказывает, что при смене системы координат наша «функция» должна умножаться на модуль якобиана функции перехода. Соответствующие объекты будем называть плотностями. Дадим теперь точные определения.

Определение 28.1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{B}$ — множество всех базисов пространства V . *Элементом объема* на V называется отображение $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующему условию: если $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — два базиса, причем $f_i = \sum a_{ij} e_j$, то $\Phi(f_1, \dots, f_n) = |\det(\|a_{ij}\|)| \cdot \Phi(e_1, \dots, e_n)$.

Ясно, что для задания элемента объема достаточно задать его значение на каком-то одном базисе и что все элементы объема на данном пространстве отличаются друг от друга умножением на неотрицательную константу.

Пример 28.2. Пусть на пространстве V из определения 28.1 задана евклидова метрика (положительно определенное скалярное произведение) $(\cdot, \cdot)$. Тогда отображение

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto \sqrt{\det \|(e_i, e_j)\|}$$

является элементом объема. Мы будем называть его *элементом объема, соответствующим метрике*.

Определение 28.3. *Плотностью* на многообразии X будем называть отображение φ , ставящее в соответствие всякой точке $x \in X$ элемент объема на $\mathcal{T}_x X$ и обладающее тем свойством, что зависимость элемента объема от точки $x \in X$ является непрерывной.

В этом определении нуждается в расшифровке понятие «непрерывная зависимость элемента объема от точки». Именно, пусть $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$, и пусть точке $x \in X$ ставится в соответствие элемент объема φ_x на $\mathcal{T}_x X$. Тогда на U определена функция

$$\varphi: x \mapsto \varphi_x(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n), \quad (28.3)$$

и требуется, чтобы эта функция была непрерывной.

Проверим, что это определение непрерывности корректно (т. е. не зависит от выбора локальных координат), и одновременно выясним закон преобразования функции φ . Именно, пусть $y_1, \dots, y_n$ — другие локальные координаты. Тогда, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

имеем

$$\varphi_x(\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n) = \varphi_x(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n) |\det \|\partial x_j / \partial y_i\||. \quad (28.4)$$

Стало быть, если записывать плотность в локальных координатах в виде функции (28.3), то при замене координат она умножается на модуль якобиана.

Важный пример плотности получается следующим образом. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (или в открытом подмножестве в $\mathbb{R}^n$). Предположим, что на $\mathbb{R}^n$ зафиксирована евклидова структура; тогда она индуцирует евклидову структуру и на каждом пространстве $\mathcal{T}_x X \subset \mathbb{R}^n$; сопоставляя этой структуре элемент объема на $\mathcal{T}_x X$, как объяснено выше, получаем плотность на X , которую мы будем называть *элементом площади*; интеграл от элемента площади по X — не что иное, как k -мерный объем многообразия X , где $k = \dim X$.

Чтобы определить интеграл от плотности, нам необходимо одно техническое средство (важное и во многих других вопросах); мы посвятим ему отдельный подраздел.

Разбиение единицы

В прошлом семестре мы уже встречались с разбиениями единицы. Сейчас нам понадобится другой (и более распространенный) вариант этой конструкции. Мы немного изменим определение 24.4.

Определение 28.4. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие C^∞ -многообразия X . Разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_i\}$, называется семейство $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $\varphi_\alpha: X \rightarrow [0; +\infty)$ — функции класса C^∞ , обладающее следующими свойствами.

(i) Носитель каждой из функций φ_α целиком содержится в каком-нибудь из множеств покрытия.

(ii) У всякой точки $x \in X$ существует окрестность $W \ni x$, имеющая непустое пересечение с $\text{supp } \varphi_\alpha$ для не более чем конечного множества индексов $\alpha \in A$.

(iii) Для всякой точки $x \in X$ имеем $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$.

Аналогично выглядит определение разбиения единицы для многообразий конечной гладкости, а также для произвольных топологических пространств (в последнем случае функции φ_α предполагаются только непрерывными).

Обратите внимание, что множества из покрытия и функции пронумерованы, вообще говоря, разными множествами индексов.

Предложение 28.5. Для всякого покрытия $\{U_i\}_{i \in I}$ гладкого многообразия X существует подчиненное ему разбиение единицы.

Доказательство. Очевидно, что у многообразия существует покрытие $\{W_j\}_{j \in J}$ со следующими свойствами:

(1) для всякого $j \in J$ множество $\overline{W_j}$ целиком содержится в какой-нибудь координатной окрестности;

(2) всякое множество W_j содержится в каком-нибудь U_i .

Лемма 28.6. Существует последовательность компактных подмножеств $K_m \subset X$, для которой $K_m \subset \text{Int}(K_{m+1})$ при всех m и $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = X$.

Доказательство леммы. Лемма очевидным образом выполняется, если X гомеоморфно открытому шару в $\mathbb{R}^n$.

Поскольку X , по определению, имеет счетную базу, имеем $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$, где все V_k — открытые подмножества, гомеоморфные открытым шарам. Пусть $V_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_{kl}$, где все K_{kl} компактны и $K_{kl} \subset K_{k,l+1}$. Если теперь положить $K_m = \bigcup_{k+l \leq m} K_{kl}$, то все условия будут выполнены. $\square$

Модифицируем теперь покрытие $\{W_j\}$ следующим образом. Ввиду компактности K_1 имеем $K_1 = W_{j_1} \cup \dots \cup W_{j_{r_1}}$ для каких-то $j_1, \dots, j_{r_1} \in J$.

Положим $Z_{1i} = W_{j_i} \cap \text{Int}(K_2)$. Далее, $K_2 = W_{j_1} \cup \dots \cup W_{j_{r_2}}$; положим $Z_{2i} = W_{j_i} \cap (\text{Int}(K_3) \setminus K_1)$, и продолжим это построение далее: при каждом $l > 1$ имеем

$$K_l \setminus K_{l-1} \subset Z_{l1} \cup \dots \cup Z_{l,r_l} \subset \text{Int}(K_{l+1})$$

и $K_{l-1} \cap Z_{lj} = \emptyset$ для всякого j . Перенумеруем множества Z_{ij} произвольным образом и обозначим полученное открытое покрытие многообразия X через $\{Z_\beta\}_{\beta \in B}$. Это покрытие обладает следующими свойствами.

(1) Каждое Z_β содержится в одном из W_k ; тем самым оно вместе со своим замыканием содержится в какой-то координатной окрестности.

(2) У всякой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающаяся только с конечным числом множеств $\overline{Z_\beta}$ (в самом деле, если $x \in K_m \subset \text{Int}(K_{m+1})$, то $\text{Int}(K_{m+1})$ не пересекается с множествами из нашего покрытия, построенными на $(m+2)$ -м и последующих шагах).

Лемма 28.7. *Если $Z \subset X$ — открытое множество, содержащееся вместе со своим замыканием в какой-то координатной окрестности, то существует неотрицательная C^∞ -функция $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $U = \phi^{-1}(0; +\infty)$.*

Доказательство леммы. Пусть $U \supset \overline{Z}$ — координатная окрестность; тогда функция $\varphi: U \rightarrow Z$ с требуемыми свойствами существует по предложению 23.1; поскольку $\text{supp } \phi \subset U$, продолжение ее нулем на все X гладкости не нарушит. $\square$

Ввиду доказанной леммы, построим для каждого $\beta \in B$ бесконечно гладкую функцию $\phi_\beta: X \rightarrow [0; +\infty)$, для которой $Z_\beta = \phi_\beta^{-1}(0; +\infty)$. Ввиду свойств (1) и (2) покрытия $\{Z_\beta\}$ функции ϕ_β обладают всеми свойствами разбиения единицы, подчиненного $\{Z_\beta\}$, кроме свойства (iii); чтобы исправить это, положим, как обычно, $\varphi_\beta = \phi_\beta / \sum_\gamma \phi_\gamma$.

Поскольку всякое Z_β содержится в каком-то W_j , а всякое W_j — в каком-то U_i , построенное разбиение единицы подчинено и покрытию $\{U_i\}$. $\square$

Замечание 28.8. Хаусдорфово топологическое пространство называется *паракомпактным*, если для всякого его открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы (из непрерывных функций). Как мы только что показали, всякое многообразие паракомпактно (заметьте, что при этом использовалось условие счетной базы из определения многообразия). Можно показать, что паракомпактны и многие другие важные в приложениях топологические пространства, в частности, все компактные пространства, все метризуемые пространства и все CW-комплексы.

Вернемся к плотностям. Напомним, что в локальных координатах плотность записывается как функция (значение на базисе $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$); при замене локальных координат эта функция преобразуется по правилу (28.4).

Ясно, что такое носитель плотности. Пусть Φ — плотность на X , причем $\text{supp } \varphi$ содержится в координатной окрестности U с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$. Если при этом Φ представляется в виде функции φ от $x_1, \dots, x_n$, то положим

$$\int_X \Phi = \int_U \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Из (28.4) и формулы замены переменных вытекает, что $\int_X \Phi$ не зависит от выбора координатной окрестности, содержащей носитель Φ .

Пусть теперь Φ — произвольная плотность. В силу предложения 28.5 существует счетное разбиение единицы $\{f_i\}$, обладающее тем свойством, что все $\text{supp } f_i$ компактны и носитель всякой f_i содержится в какой-нибудь координатной окрестности. Положим теперь

$$\int_X \Phi = \sum_i \int_X (f_i \Phi);$$

поскольку все слагаемые в правой части корректно определены, левая часть также корректно определена. Надо только проверить, что интеграл не зависит от выбора разбиения единицы. Это делается так. Пусть $\{g_j\}$ — другое разбиение единицы (также счетное, с компактными носителями, также подчиненное некоторому покрытию координатными окрестностями). Тогда $\{f_i g_j\}$ — также, очевидно, разбиение единицы с указанными свойствами. Далее, для всякой f_i ее носитель может иметь непустое пересечение не более чем с конечным числом $\text{supp } g_j$: каждая точка $x \in \text{supp } f_i$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом $\text{supp } g_j$, а весь $\text{supp } f_i$, будучи компактным, покрывается конечным числом таких окрестностей. Поэтому $f_i = \sum_j f_i g_j$, причем сумма

в правой части конечна. Следовательно, $\int_X f_i \Phi = \sum_j \int_X f_i g_j \Phi$, откуда и из свойств двойных рядов (предложение 11.11) вытекает, что

$$\sum_i \int_X (f_i \Phi) = \sum_{i,j} \int_X (f_i g_j \Phi).$$

Так как аналогичное равенство можно записать с переменной ролей f и g , все доказано.

29. Дифференциальные формы

Перейдем теперь к изложению более изощренной теории интегрирования, являющейся далеким и нетривиальным обобщением формулы Ньютона—Лейбница. Нам понадобится довольно солидная подготовка: придется сначала дать определение тех объектов, которые мы будем интегрировать (эти объекты называются дифференциальными формами), а затем — объектов, по которым мы будем интегрировать (это будут или сингулярные цепи, или ориентированные многообразия с краем). Начнем с форм.

Формы степени 1

Определение 29.1. Пусть $x \in X$, где X — гладкое многообразие. *Кокасательным пространством к многообразию X в точке x* называется векторное пространство, двойственное к $\mathcal{T}_x X$.

Обозначение: $\mathcal{T}_x^* X$ (по общему правилу) или $\Omega_{X,x}^1$.

Элементы кокасательного пространства называются кокасательными векторами (а иногда — ковекторами).

Определение 29.2. *Дифференциальной формой степени 1* (синонимы: 1-форма, пфафова форма) на многообразии X называется отображение ω , которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие кокасательный вектор $\omega_x \in \Omega_{X,x}^1$ таким образом, что ω_x гладко зависит от x .

В этом определении нуждается в разъяснении выражение « ω_x гладко зависит от x ». Под этим понимается следующее. Пусть $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$; как мы знаем, в каждой точке $x \in U$ касательные векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ образуют базис в $\mathcal{T}_x X$; обозначим через $dx_1, \dots, dx_n$ дуальный базис в $\mathcal{T}_x^* X$ — тогда на U форма ω запишется в виде $\sum f_i dx_i$. Так вот, условие гладкости состоит в том, что функции f_i должны быть гладкими. Поскольку при переходе к другим локальным координатам $y_1, \dots, y_n$ базис $\{\partial/\partial y_j\}$ получается из $\{\partial/\partial x_j\}$ умножением на невырожденную матрицу из гладких функций, дуальные базисы связаны аналогичным образом, так что все равно, в каких именно локальных координатах проверять эту гладкость.

Множество 1-форм на многообразии X обозначается $\Omega^1(X)$. Это векторное пространство над $\mathbb{R}$ и, кроме того, модуль над кольцом $\mathcal{O}(X)$ гладких функций на X : если f — гладкая функция на X и $\omega \in \Omega^1(X)$, то форма $f\omega$ задается по правилу $(f\omega)_x = f(x)\omega_x$.

Важный источник построения 1-форм — операция дифференцирования функций.

Определение 29.3. Пусть f — гладкая функция на многообразии X . Ее *дифференциалом* называется 1-форма df , определенная следующим образом: для всякого $x \in X$ линейный функционал $(df)_x \in \mathcal{T}_x X$ действует по правилу $v \mapsto v(f)$, если рассматривать касательные векторы как дифференцирования из $\mathcal{O}_{X,x}$ в $\mathbb{R}$ (обозначение 26.4).

Пример 29.4. Коэффициент кокасательного вектора $(df)_x$ при dx_i в базисе $\langle dx_1, dx_2, \dots, dx_n \rangle$ равен результату действия $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на f в точке x , то есть $(\partial f / \partial x_i)(x)$. Следовательно, имеет место равенство

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (29.1)$$

Из этого равенства, в свою очередь, видно что форма dx_i является дифференциалом координатной функции x_i , и тем самым запись $\omega = \sum f_i dx_i$ не является двусмысленной.

Для дифференциалов функций верен такой аналог формулы Лейбница.

Предложение 29.5. Если $f, g \in \mathcal{O}(X)$, то $d(fg) = f dg + g df$.

Доказательство. Это тавтология: если дифференцирование v лежит в $\mathcal{T}_x X$, то

$$d(fg)_x(v) = v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f) = (f dg + g df)_x(v).$$

Можно также, не мудрствуя лукаво, провести вычисление в локальных координатах. $\square$

Замечание 29.6. Дифференциальные формы можно, подобно векторным полям, определить чисто алгебраически. Например, легко показать, что $\Omega^1(X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\text{Vect}(X), \mathcal{O}(X))$ (изоморфизм $\mathcal{O}(X)$ -модулей; через $\text{Vect}(X)$ обозначено множество векторных полей на X , рассматриваемое как $\mathcal{O}(X)$ -модуль). Более интересна другая алгебраическая характеристика: оказывается, что $\Omega^1(X)$ изоморфен, как $\mathcal{O}(X)$ -модуль, модулю с образующими df для всевозможных $f \in \mathcal{O}(X)$ и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} df &= 0, & \text{если } f &\text{— константа;} \\ d(f+g) &= df + dg & \text{для всяких } f, g \in \mathcal{O}(X); \\ d(fg) &= f dg + g df & \text{для всяких } f, g \in \mathcal{O}(X). \end{aligned}$$

Мы не будем ни доказывать этот факт, ни пользоваться им, но полезно иметь его в виду.

Определение 29.7. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение и ω — форма степени 1 на Y . Тогда ее *обратным образом* при отображении φ называется 1-форма $\varphi^*\omega \in \Omega^1(X)$, определенная по формуле

$$(\varphi^*\omega)_x(v) = \omega_{\varphi(x)}(\varphi'(v)),$$

где через $\varphi': \mathcal{T}_x X \rightarrow \mathcal{T}_{\varphi(x)} Y$ обозначена, как обычно, производная отображения φ в точке x .

Основное свойство обратного образа — это то, что он коммутирует со взятием дифференциала.

Предложение 29.8. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение и f — гладкая функция на Y . Тогда $d(f \circ \varphi) = \varphi^*(df)$.

Доказательство. Это тоже тавтология: если $v \in \mathcal{T}_x X$, то

$$d(f \circ \varphi)_x(v) = v(f \circ \varphi) = \varphi'(v(f)) = (df)_{\varphi(x)}(\varphi'(v)) = \varphi^*(df)(v). \quad \square$$

Немного линейной алгебры

В этом разделе мы в удобной для нас форме напомним (без доказательств) некоторые факты из линейной алгебры.

Пусть V — векторное пространство над полем K (при желании можно сразу считать, что $K = \mathbb{R}$). Полилинейное отображение $\omega: V^m \rightarrow K$ называется *кососимметрическим*, если $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$, как только $v_i = v_j$ для каких-то $i \neq j$. Если $\text{char } K \neq 2$, это условие эквивалентно тому, что ω меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Пространство кососимметричных полилинейных отображений из V^k в K обозначается $\bigwedge^k V^*$ (поскольку оно канонически изоморфно k -й внешней степени пространства V^*).

Если $\dim V = n$, то $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$ и $\bigwedge^k V = 0$ при $k > n$.

Определение 29.9. Пусть $\lambda \in \bigwedge^k V^*$, $\mu \in \bigwedge^m V^*$. *Внешним произведением* λ и μ называется кососимметричное отображение $\lambda \wedge \mu \in \bigwedge^{k+m} V^*$, определенное следующим образом. Обозначим через A множество всевозможных разбиений вида $\{1, 2, \dots, k+m\} = S \sqcup T$, где S состоит из k элементов, а T — из m элементов (таким образом, всего таких разбиений будет $\binom{k+m}{k}$). Для каждого разбиения $\alpha \in A$ зафиксируем какое-нибудь упорядочение множества S_α и множества T_α (в понятных обозначениях). Тогда

$$(\lambda \wedge \mu)(v_1, \dots, v_{k+m}) = \sum_{\alpha \in A} \varepsilon \cdot \lambda(v_{s_1}, \dots, v_{s_k}) \mu(v_{t_1}, \dots, v_{t_m});$$

здесь $s_1, \dots, s_k$ (соотв. $t_1, \dots, t_m$) — элементы множества S_α (соотв. T_α), перечисленные в выбранном нами порядке, а ε — знак перестановки $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_m$.

Нетрудно проверить, что полилинейная форма $\lambda \wedge \mu$ действительно кососимметрична и не зависит от выбора упорядочений на S_α и T_α .

Пример 29.10. Если $\lambda, \mu \in \bigwedge^2 V^*$, то

$$(\lambda \wedge \mu)(x, y, z, t) = \lambda(x, y)\mu(z, t) - \lambda(x, z)\mu(y, t) + \lambda(z, t)\mu(x, y) + \\ + \lambda(z, x)\lambda(y, t) + \lambda(y, z)\lambda(x, t) - \lambda(x, z)\lambda(y, t).$$

В дальнейшем мы будем использовать такое соглашение: если $\omega \in \bigwedge^l V^*$, будем писать, что $\deg \omega = l$.

Легко проверяются следующие свойства внешнего произведения:

Дистрибутивность: $(\lambda_1 + \lambda_2) \wedge \mu = \lambda_1 \wedge \mu + \lambda_2 \wedge \mu$;

Ассоциативность: $(\omega \wedge \lambda) \wedge \mu = \omega \wedge (\lambda \wedge \mu)$;

Косокоммутативность: $\lambda \wedge \mu = (-1)^{\deg \lambda \deg \mu} \mu \wedge \lambda$.

Отметим еще следующий легко проверяемый факт: если $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in V^*$ и $v_1, \dots, v_n \in V$, то

$$(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n)(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \lambda_1(v_{\sigma(1)}) \dots \lambda_n(v_{\sigma(n)}),$$

где через $\text{sign}(\sigma)$ обозначен знак перестановки σ .

Пусть $\langle e^1, \dots, e^n \rangle$ — базис пространства V , и пусть $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ — дуальный базис пространства V^* . Каждое m -элементное подмножество $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ можно единственным образом записать в виде $S = \{i_1, \dots, i_m\}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. Положим $e_S = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \in \bigwedge^m V^*$. Тогда всевозможные e_S , где S пробегает все m -элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, n\}$, образуют базис пространства $\bigwedge^m V^*$.

Формы произвольной степени

Определение 29.11. *Дифференциальной формой степени k* (синоним: k -форма) на многообразии X называется отображение ω , которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие кососимметричное полилинейное отображение $\omega_x \in \bigwedge^k \mathcal{T}_{X,x}^*$ таким образом, что ω_x гладко зависит от x .

Множество k -форм на многообразии X обозначается $\Omega^k(X)$. Так же, как и $\Omega^1(X)$, оно является $\mathcal{O}(X)$ -модулем. Ясно, что $\Omega^k(X) = 0$ при $k > \dim X$. Мы иногда будем писать $\Omega^0(X)$ вместо $\mathcal{O}(X)$.

В локальных координатах k -форма записывается как

$$\omega = \sum_S f_S dx_S,$$

где S пробегает все k -элементные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и где $dx_S = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, если $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Дифференциальные формы можно перемножать так же, как и кососимметрические полилинейные формы:

Определение 29.12. Пусть $\omega \in \Omega^k(X)$, $\eta \in \Omega^l(X)$. Тогда *внешним произведением* этих дифференциальных форм называется форма $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(X)$, определенная по правилу

$$(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x.$$

Умножение функции на форму мы также будем считать внешним произведением (из $\Omega^0(X) \times \Omega^k(X)$ в $\Omega^k(X)$).

Для форм произвольной степени можно очевидным образом определить обратный образ, аналогичный обратному образу 1-форм:

Определение 29.13. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда *обратным образом формы ω при отображении φ* называется k -форма $\varphi^*\omega \in \Omega^k(Y)$, определенная по формуле

$$(\varphi^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\varphi(x)}(f_*v_1, \dots, f_*v_k),$$

где через $\varphi_*: \mathcal{T}_x X \rightarrow \mathcal{T}_{\varphi(x)} Y$ обозначена, как обычно, производная отображения φ в точке x .

Следующее утверждение очевидно (и относится к линейной алгебре).

Предложение 29.14. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение, ω и η — дифференциальные формы на X . Тогда $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$.

Наша ближайшая цель — определить для всех k отображения

$$d^k: \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X),$$

обобщающие известное нам отображение $d: \mathcal{O}(X) = \Omega^0(X) \rightarrow \Omega^1(X)$.

Предложение 29.15. Для всякого многообразия X и всякого целого неотрицательного числа k можно образом определить $\mathbb{R}$ -линейное отображение $d_X^k: \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X)$, таким образом, чтобы этот набор отображений обладал следующими свойствами.

Естественность: для всякого гладкого отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ имеем $\varphi^*(d_Y^k \omega) = d_X^k(\varphi^* \omega)$. Иными словами, коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{k+1}(X) & \xleftarrow{\varphi^*} & \Omega^{k+1}(Y) \\ d_X^k \uparrow & & \uparrow d_Y^k \\ \Omega^k(X) & \xleftarrow{\varphi^*} & \Omega^k(Y). \end{array}$$

Нормировка: $d_X^0(f) = df$ для всех $f \in \mathcal{O}(X) = \Omega^0(X)$.

Тождество Лейбница: $d_X^k(\omega \wedge \eta) = d_X^k(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d_X^k \eta$.

Нулевой квадрат: $d_X^{k+1} \circ d_X^k = 0$.

Более того, набор отображений d_X^i (для всех i и X), обладающий этими свойствами, единствен.

Замечание 29.16. Существующие в силу предложения 29.15 отображения d_X^k называются *операторами внешнего дифференцирования*; на практике при записи операторов внешнего дифференцирования опускается как нижний индекс X (всегда), так и верхний индекс k (почти всегда). Мы тоже не будем отступать от этой традиции.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть операторы внешнего дифференцирования (для всех степеней и всех многообразий) построены. Заметим, что из тождества Лейбница по индукции вытекает равенство

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) &= (d\omega_1) \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_r + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge (d\omega_2) \wedge \omega_3 \wedge \dots \wedge \omega_r + \\ &+ (-1)^{\deg \omega_1 + \deg \omega_2} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge (d\omega_3) \wedge \omega_4 \wedge \dots \wedge \omega_r + \dots \\ &\dots + (-1)^{\deg \omega_1 + \dots + \deg \omega_{r-1}} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{r-1} \wedge d\omega_r \end{aligned} \quad (29.2)$$

(всякий раз, когда d перескакивает через форму ω , добавляется множитель $(-1)^{\deg \omega}$).

Далее, из свойства естественности, примененного к вложению $i: U \rightarrow X$, где U — открытое подмножество, получаем, что $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$. Стало быть, внешний дифференциал всякой формы $\omega \in \Omega^k(X)$ однозначно определяется дифференциалами ограничений формы на все координатные окрестности; остается показать, что эти ограничения также определены однозначно. Поскольку, опять же ввиду свойства естественности, взятие внешнего дифференциала коммутирует с обратным образом относительно диффеоморфизма, являющегося локальной картой, достаточно показать, что внешний дифференциал однозначно определен на многообразиях, являющихся открытыми под-

множествами в $\mathbb{R}^n$. Для этого же заметим, что всякая k -форма на области в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$; из формулы (29.2) и свойств нормировки и нулевого квадрата внешний дифференциал такого слагаемого равен $df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, где df понимается в смысле определения 29.3. Это выражение определено однозначно, что и завершает доказательство единственности.

Теперь докажем существование. Для этого для начала определим дифференциалы форм на меньшей категории: открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ (при всевозможных n). Именно, в области $U \subset \mathbb{R}^n$ всякая k -форма однозначно представляется в виде суммы слагаемых вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Определим дифференциалы для этих слагаемых следующим (единственно возможным, как мы только что видели) способом:

$$d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k};$$

на произвольные формы продолжим по линейности.

Выполнимость свойства нормировки при таком определении очевидна. Тождество Лейбница проверяется так. Пусть $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$. Тогда

$$\omega \wedge \eta = fg dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} = \\ &= fdg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} + \\ &\quad + gdf \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно в точности $d\omega \wedge \eta$, а первое получится из $\omega \wedge d\eta$, если перетащить 1-форму dg влево через k внешних сомножителей $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_k}$; в силу косокоммутативности внешнего умножения форма $\omega \wedge d\eta$ умножится при этом на $(-1)^k$, откуда все и следует.

Проверим выполнимость тождества $d^2 = 0$. Заметим, во-первых, что $d(df) = 0$ для всякой функции (т. е. 0-формы): в самом деле,

$$d(df) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j,$$

и в правой части слагаемые с $dx_i \wedge dx_j$ и $dx_j \wedge dx_i$ сокращаются ввиду симметрии вторых производных. Пусть теперь ω — произвольная форма; можно считать, что $\omega = fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$. Тогда (пользуясь то-

ждеством (29.2), верным, коль скоро верно тождество Лейбница, и равенством $d^2 = 0$ для функций) имеем

$$dd(fdg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = d(df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = 0.$$

Наконец, естественность вытекает из того, что с обратным образом коммутируют и внешнее произведение форм (предложение 29.14), и дифференциал функции (предложение 29.8).

Будем теперь «расширять плацдарм». Определим сначала дифференциал на многообразиях, диффеоморфных открытым подмножествам в $\mathbb{R}^n$. Пусть многообразие V диффеоморфно открытому подмножеству $U \subset \mathbb{R}^n$, причем $\varphi: V \rightarrow U$ — соответствующий диффеоморфизм. Тогда для формы ω на V положим (исходя из желания, чтобы выполнялось свойство естественности):

$$d\omega = \varphi^*(d(\varphi^{-1} * \omega)).$$

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора диффеоморфизма φ . В самом деле, любой другой диффеоморфизм имеет вид $h \circ \varphi$, где $h: U \rightarrow U$ — диффеоморфизм; имеем

$$\begin{aligned} (h \circ \varphi)^*(d(h^{-1} \circ \varphi^{-1})^* \omega) &= \varphi^* \circ h^* d(h^{-1} \circ \varphi^{-1})^* \omega = \\ &= \varphi^* \circ h^* \circ h^{-1*} (d(\varphi^{-1} * \omega)) = \varphi^* (d(\varphi^{-1} * \omega)) \end{aligned}$$

(мы переставили d и h^{-1*} ввиду доказанной естественности дифференциала на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$). Четыре свойства так определенного дифференциала на многообразиях, диффеоморфных открытым множествам в евклидовых пространствах, из этого определения получается с очевидностью.

Распространим, наконец, определение дифференциала на произвольные многообразия. Пусть ω — форма на многообразии X . Определим $d\omega$ следующим образом. Для всякого открытого $U \subset X$, диффеоморфного открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, положим $\eta_U = d(\omega|_U)$; из свойства естественности вытекает, что $\eta_U|_{U \cap V} = \eta_V|_{U \cap V}$ для любых U и V , так что все η_U склеиваются в одну форму η ; положим $\eta = d\omega$.

Поскольку все четыре свойства дифференциала можно проверять локально, а для многообразий, диффеоморфных открытым подмножествам в евклидовых пространствах, мы их уже установили, все доказано. $\square$

30. Интегрирование форм по цепям

Сейчас мы введем те « k -мерные объекты», по которым можно интегрировать дифференциальные формы степени k .

Определение 30.1. Пусть X — гладкое многообразие. k -мерной поверхностью в X называется пара (U, φ) , где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое подмножество и $\varphi: U \rightarrow X$ — гладкое отображение.

Разумеется, геометрически наша k -мерная поверхность (точнее, ее образ при отображении φ) гладким подмногообразием в X быть не обязана (пример: $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$).

Определение 30.2. Пусть (U, φ) — k -мерная поверхность в многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда *интегралом* от формы ω по этой поверхности называется число $\int_U f dy_1 \dots dy_k$, где $\varphi^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$.

Определенный таким образом интеграл почти не зависит от выбора параметризации φ :

Предложение 30.3. Пусть (U, φ) — k -мерная область в многообразии X и пусть $\psi: V \rightarrow U$ — диффеоморфизм со всюду положительным якобианом, где $V \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Тогда для всякой формы $\omega \in \Omega^k(X)$ интегралы от нее по k -мерным поверхностям (U, φ) и $(V, \varphi \circ \psi)$ совпадают.

Доказательство. Пусть $\varphi^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$. Тогда $(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega) = (f \circ \psi) \cdot J(\psi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$, где через $J(\psi)$ обозначен якобиан отображения ψ . Нам нужно проверить, что $\int_U f dy_1 \dots dy_k = \int_V (f \circ \psi) \cdot J(\psi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$; поскольку, по условию, $J(\psi) > 0$ всюду на V , это равенство немедленно следует из теоремы о замене переменных в интеграле. $\square$

Итак, интегралы по нашим « k -мерным поверхностям» не меняются при замене параметризации на другую, отличающуюся на диффеоморфизм с положительным якобианом («сохраняющий ориентацию»). Например, «одномерные поверхности» в смысле нашего определения имеет смысл называть ориентированными кривыми; интеграл от 1-формы по кривой не зависит от того, с какой скоростью (и равномерно или нет) точка бежит по кривой, но зависит от направления движения. Если же мы проведем замену параметра с отрицательным якобианом («обратим ориентацию»), то интеграл, как легко понять, сменит знак на противоположный.

Теперь дадим предварительную формулировку основной «теоремы».

Утверждение 30.4 (теорема Стокса: предварительная форма). Пусть V — k -мерная поверхность в многообразии X , и пусть ∂V — граница

этой k -мерной поверхности. Тогда для всякой $\omega \in \Omega^{k-1}(X)$ имеет место равенство

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega.$$

Слово теорема мы взяли в кавычки, поскольку у нас нет определения границы k -мерной поверхности, а при попытке такое определение дать возникают трудности. Видимо, невозможно дать общее определение границы k -мерной поверхности в смысле определения 30.1 так, чтобы эта граница оказалась $(k-1)$ -мерной поверхностью. Впрочем, никто к этому и не стремится: упомянутая трудность не преодолевается, но обходится. Именно, наивное определение 30.1 модифицируется таким образом, чтобы у объекта, по которому интегрируются k -формы, было удобно определить край. Таких уточнений понятия k -мерной поверхности в многообразии известно по крайней мере два. Одно из них называется «гладкая сингулярная цепь», а другое — «ориентированное многообразие с краем». Соответственно, получаются две теории интегрирования дифференциальных форм, для каждой из которых верно утверждение 30.4. Мы рассмотрим обе теории. Начнем с сингулярных цепей.

Соглашение 30.5. Пусть M — произвольное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и X — гладкое многообразие. Будем говорить, что отображение $\varphi: M \rightarrow X$ является гладким, если его можно продолжить на какое-то открытое множество $U \supset M$ так, чтобы продолженное отображение было гладким в обычном смысле.

Определение 30.6. *Стандартным k -мерным симплексом* называется подмножество $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$, являющееся выпуклой оболочкой точек $e_0, e_1, \dots, e_k$, где e_0 — начало координат, а e_i при $1 \leq i \leq k$ — точка, у которой i -я координата равна единице, а остальные — нулю.

Определение 30.7. Пусть X — гладкое многообразие. *Гладким сингулярным k -мерным симплексом в X* называется гладкое (в смысле соглашения 30.5) отображение $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$.

Замечание 30.8. Если заменить в этом определении слово «гладкое» на «непрерывное», то получится определение сингулярного симплекса, имеющее смысл для любых топологических пространств. Негладкие сингулярные симплексы также активно используются, но не для интегрирования, а для построения теории гомологий. Часто мы будем называть гладкие сингулярные симплексы просто сингулярными симплексами.

Определение 30.9. Пусть σ — (гладкий) k -мерный сингулярный симплекс на многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. *Интегралом формы ω по симплексу σ* называется интеграл формы ω по k -мерной поверхности $(\text{Int}(\Delta_k), \sigma|_{\text{Int}(\Delta_k)})$ в смысле определения 30.2. Обозначение: $\int_{\sigma} \omega$.

Заметим, что интеграл формы по симплексу всегда существует, так как функция f , определенная равенством $\sigma^*\omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$, непрерывно продолжается на компактное множество Δ_n и тем самым ограничена.

Сингулярные симплексы — это что-то вроде «криволинейных треугольников» (тетраэдров и т. д.) в многообразии. Мы определили интегралы по этим криволинейным треугольникам; чтобы интегрировать по более сложным фигурам, надо их разбить на сингулярные симплексы. Это разбиение формализуется в следующих определениях.

Определение 30.10. k -мерной сингулярной цепью на многообразии X называется формальная (конечная) линейная комбинация k -мерных сингулярных симплексов с действительными коэффициентами.

Определение 30.11. Пусть $\sigma = \sum_i p_i \sigma_i$ — k -мерная сингулярная цепь на многообразии X и $\omega \in \Omega^k(X)$. *Интегралом* формы ω по цепи σ называется число $\int_{\sigma} \omega = \sum_i p_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Мы ввели сингулярные цепи ради того, чтобы было удобно определять их границы. Вот как это делается.

Определение 30.12. Пусть σ — k -мерный сингулярный симплекс на многообразии X , и пусть $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. i -й *гранью* сингулярного симплекса σ называется $(k-1)$ -мерный сингулярный симплекс $\partial_i(\sigma) = \sigma \circ \tau_i: \Delta_{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где отображение $\tau_i: \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ есть аффинное отображение, переводящее $e_0(\Delta_{k-1})$ в $e_0(\Delta_k)$, $\dots$, $e_{i-1}(\Delta_{k-1})$ в $e_{i-1}(\Delta_k)$, $e_i(\Delta_{k-1})$ в $e_{i+1}(\Delta_k)$, $\dots$, $e_{k-1}(\Delta_{k-1})$ в $e_k(\Delta_k)$.

Определение 30.13. *Границей* k -мерного сингулярного симплекса σ называется $(k-1)$ -мерная сингулярная цепь

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i \sigma.$$

Границей k -мерной сингулярной цепи $\sigma = \sum p_i \sigma_i$ называется $(k-1)$ -мерная сингулярная цепь

$$\partial\sigma = \sum p_i \partial\sigma_i.$$

К этому определению необходим комментарий. Несомненно, граница k -мерного симплекса сложена из его граней; вопрос в том, почему этим граням приписываются именно такие знаки. Объяснение тут следующее. С точки зрения интегрирования форм сингулярные симплексы суть подмножества (определенного вида) в X , снабженные ориентацией. При этом, чтобы задать ту или иную ориентацию симплекса, надо выбрать какой-то порядок перечисления его вершин. С точки зрения наших определений это выглядит так. Если s — перестановка множества $\{0, 1, \dots, k\}$, то сингулярному симплексу σ можно поставить в соответствие симплекс $\sigma \circ f_s$, где $f_s: \Delta_k \rightarrow \Delta_k$ — аффинный автоморфизм стандартного симплекса, задающийся перестановкой s . Если перестановка s четна, то предложение 30.3 показывает, что $\int \sigma \circ f_s \omega = \int_{\sigma} \omega$ для всякой $\omega \in \Omega^k(X)$; если же s — нечетная перестановка, то якобиан преобразования f_s равен -1 , и для всякой k -формы ω имеем

$$\int \sigma \circ f_s \omega = - \int_{\sigma} \omega = \int_{-\sigma} \omega$$

(см. определение 30.11). Стало быть, ориентация симплекса — это просто порядок нумерации его вершин, причем порядки, отличающиеся на четную перестановку, не различаются.

Границу симплекса также необходимо снабдить ориентацией, разумным образом согласованной с ориентацией самого симплекса. Эти согласованные ориентации выбираются следующим образом: на грани номер i (выпуклая оболочка всех вершин, кроме i -й — см. определение 30.12) выбирается такая нумерация вершин, чтобы нумерация вершин всего симплекса в порядке «сначала i -я вершина, затем вершины i -й грани в выбранном порядке» определяла исходную ориентацию симплекса. Нетрудно понять, что определение 30.13 соответствует этому словесному описанию.

Читателю рекомендуется самостоятельно сделать чертежи для случаев $k = 2$ и 3 . В первом случае он увидит, что ориентация границы треугольника по определению 30.13 задает ее обход в одном направлении (против часовой стрелки, если ориентация самого треугольника задается обходом его вершин в направлении против часовой стрелки). Во втором случае грани тетраэдра окажутся ориентированными таким образом, что при взгляде изнутри тетраэдра направление обхода вершин всех граней будет одинаковым (либо все по часовой стрелке, либо все против часовой).

Еще одно оправдание выбора знаков для границы симплекса содержится в следующем предложении. Его неформальный смысл таков. Ес-

ли знаки для граней, составляющих границу симплекса, выбраны разумно, то эта граница должна составлять «единое целое» и у нее границы быть уже не должно. Так оно и происходит:

Предложение 30.14. $\partial(\partial\sigma) = 0$ для любой сингулярной цепи σ .

Доказательство. Достаточно доказывать для случая, когда σ — сингулярный симплекс. Заметим, что $\partial(\partial\sigma)$ является суммой (с какими-то коэффициентами) «граней коразмерности два» (граней граней) симплекса σ . При этом легко понять, что грань коразмерности 2, полученная удалением вершин с номерами i и j , где $i < j$, встречается в этой сумме ровно два раза: первый раз как слагаемое в $\partial_i(\partial_j\sigma)$, и второй раз — как слагаемое в $\partial_j(\partial_i\sigma)$. В первом случае перед ней стоит коэффициент $(-1)^{i+j}$, а во втором $(-1)^{i+j-1}$, так что все слагаемые в $\partial(\partial\sigma)$ сокращаются. $\square$

Теперь мы можем сформулировать теорему, уточняющую неформальное утверждение 30.4.

Теорема 30.15 (теорема Стокса, первый вариант). Пусть σ — сингулярная k -цепь на многообразии X и $\omega \in \Omega^{k-1}(X)$. Тогда $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$.

Доказательство. Из определений интеграла по цепи и границы цепи ясно, что достаточно доказать теорему для случая, когда $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ — сингулярный симплекс. При этом, поскольку внешнее дифференцирование коммутирует со взятием обратного образа, можно считать, что ω — дифференциальная форма на окрестности стандартного симплекса $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$. Еще раз пользуясь линейностью, получаем, что можно считать, что $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$, где $1 \leq i \leq k$ (шляпка над сомножителем означает, что он опущен). Тогда $d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, и правая часть равенства, которое мы должны доказать, имеет вид

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_k.$$

Однако же ограничение формы $dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$ на каждую грань симплекса Δ_k , кроме ∂_0 и ∂_i , равно нулю, так что левая часть доказываемой формулы равна

$$\int_{\partial_0 \Delta_k} \omega + (-1)^i \int_{\partial_i \Delta_k} \omega. \quad (30.1)$$

Второе слагаемое в (30.1) равно просто

$$(-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_{k-1}) dy_1 \dots dy_{k-1},$$

а первое слагаемое мы вычислим непосредственно по определению. Именно, аффинное отображение из Δ_{k-1} в $\partial_0 \Delta_k$, сохраняющее порядок вершин, имеет вид

$$\psi: (y_1, \dots, y_{k-1}) \mapsto (1 - y_1 - \dots - y_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1});$$

стало быть,

$$\psi^* \omega = (-1)^{i-1} f(1 - y_1 - \dots - y_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1}) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{k-1},$$

так что первое слагаемое в (30.1) равно

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(1 - y_1 - \dots - y_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1}) dy_1 \dots dy_{k-1}.$$

Сделаем в этом интеграле замену $y_1 = z_2, y_2 = z_3, \dots, y_{i-1} = 1 - z_1 - \dots - z_{k-1}, y_i = z_i, \dots, y_{k-1} = z_k$. Эта замена переводит симплекс Δ_{k-1} в себя, а абсолютная величина ее якобиана равна 1, так что первое слагаемое в (30.1) равно

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(z_1, \dots, z_{i-1}, 1 - z_1 - \dots - z_{k-1}, z_i, \dots, z_k) dz_1 \dots dz_k.$$

Стало быть, все сводится к доказательству такого равенства:

$$\begin{aligned} & (-1)^{i-1} \int_{\Delta_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_k = \\ & = (-1)^{i-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(z_1, \dots, z_{i-1}, 1 - z_1 - \dots - z_{k-1}, z_i, \dots, z_k) dz_1 \dots dz_k + \\ & \quad + (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_{k-1}) dy_1 \dots dy_{k-1}. \end{aligned}$$

Если умножить обе части этого равенства на $(-1)^i$, то оно станет очевидно как прямое следствие теоремы Фубини (сначала интегрируем по dy_i , причем этот интеграл вычисляется по формуле Ньютона—Лейбница). $\square$

31. Интегрирование форм по многообразиям

На этой лекции будет построена вторая теория интегрирования дифференциальных форм. На сей раз мы будем интегрировать формы по «ориентированным многообразиям с краем». Начнем с определений.

Ориентация многообразия

Определение 31.1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Ориентацией* пространства V называется класс эквивалентности его базисов относительно следующего отношения: два базиса считаются эквивалентными (*одинаково ориентированными*), если матрица перехода между ними имеет положительный определитель. Векторное пространство, на котором выбрана ориентация, называется *ориентированным*.

Ясно, что у векторного пространства имеются ровно две ориентации. Если $f: V_1 \rightarrow V_2$ — изоморфизм векторных пространств, причем V_1 ориентировано, то изоморфизм f индуцирует ориентацию на V_2 (образ «положительно ориентированного» базиса в V_1 объявляется положительно ориентированным базисом в V_2).

Определение 31.2. Пусть X — гладкое многообразие. *Ориентация многообразия X* — это выбор ориентации в касательном пространстве $\mathcal{T}_x$ для каждой точки $x \in X$; при этом требуется, чтобы ориентация в $\mathcal{T}_x$ непрерывно зависела от x . Многообразие, на котором можно задать ориентацию, называется *ориентируемым*, а многообразие, на котором задана ориентация, — *ориентированным*.

Как водится, в определении такого типа необходимо уточнить, что означает, что ориентация непрерывно зависит от точки. Ответ таков: если $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$, то непрерывная зависимость ориентации от точки означает, что у всякой точки $p \in U$ существует такая окрестность $W \ni p$, $W \subset U$, что ориентация базиса из касательных векторов $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ одинакова (всегда положительна или всегда отрицательна) во всех точках множества W . Поскольку якобианы функций перехода не обращаются в нуль и тем самым сохраняют постоянный знак, из выполнимости этого условия в одной координатной окрестности следует его выполнимость и в любой другой.

Предупреждение 31.3. Как мы вскоре увидим, ориентацию можно задать не на всяком многообразии.

Разумеется, всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ ориентируемо. Вот менее тривиальный пример.

Предложение 31.4. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Положим $X = \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = 0\}$, и пусть $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in X$. Тогда многообразие X ориентируемо.

Доказательство. Ввиду предложения 20.2 X является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$; более того, для всякой точки подмногообразия X существует содержащее ее открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi: U \rightarrow V$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, обладающий тем свойством, что $\varphi(X \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V: y_1 = 0\}$, причем $y_1 = f \circ \varphi^{-1}$. Теперь зафиксируем ориентацию на $\mathbb{R}^n$ и будем говорить, что базис $v_1, \dots, v_{n-1}$ в $\mathcal{T}_x X$ положительно ориентирован, если положительно ориентирован базис $\frac{\partial}{\partial x_1}, \varphi'(v_1), \dots, \varphi'(v_{n-1})$. Непрерывность очевидна. $\square$

Пример 31.5. Пусть $X = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (единичная сфера). Поскольку ее можно задать уравнением $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1 = 0$, удовлетворяющим условию предложения 31.4, сфера ориентируема. Более того, из доказательства этого предложения явствует, что эту ориентацию можно задать следующим образом. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию в $\mathbb{R}^{n+1}$; для каждой точки $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ пусть $e_x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{T}_x \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ (изоморфизм естественный). (Иными словами, e_x — единичный вектор, перпендикулярный сфере в точке x и направленный «наружу».) Легко видеть, что базис $(v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x S^n \subset \mathcal{T}_x \mathbb{R}^{n+1}$ положительно ориентирован, если базис $(e_x, v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ положительно ориентирован относительно выбранной нами ориентации в $\mathbb{R}^{n+1}$.

«Антиподальное отображение» ι , переводящее точку сферы в диаметрально противоположную, сохраняет эту ориентацию при нечетных n и обращает ее при четных n . В самом деле, $\iota_*(e_x) = e_{\iota(x)}$, так что если $(v_1, \dots, v_n)$ — базис в $\mathcal{T}_x X$, то базис $(\iota_*(v_1), \dots, \iota_*(v_n))$ ориентирован так же, как базис $(v_1, \dots, v_n)$, тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto -x$, действующее из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняет ориентацию.

Приведем несколько простых критериев ориентируемости.

Предложение 31.6. *Связное многообразие X ориентируемо тогда и только тогда, когда его можно покрыть таким семейством координатных окрестностей, что все функции перехода имеют положительный якобиан.*

Доказательство. Пусть многообразие X покрыто семейством локальных карт $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ с сохраняющими ориентацию функциями перехода. Выберем какую-нибудь ориентацию на $\mathbb{R}^n$ и перенесем ее с помощью всевозможных $(\varphi^{-1})_*$ на каждую из координатных окрестностей $U \subset X$. Поскольку якобианы функций перехода положительны, ориентация каждого касательного пространства $\mathcal{T}_x X$ не зависит от того, с помощью какой из содержащих x координатных окрестностей она

вводилась. Тем самым получаем отображение из X в $\tilde{X}$, действующее по правилу $x \mapsto (x, \varepsilon_x)$, где ε_x — введенная по вышеописанному правилу ориентация на $\mathcal{T}_x X$.

Обратно, пусть X ориентировано и $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ — покрытие связными координатными окрестностями. Зафиксируем ориентацию в $\mathbb{R}^n$ и модифицируем локальные координаты так. Если диффеоморфизм $\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию, то ничего с ним делать не будем, а если обращает, то скомпонуем его с отражением $\mathbb{R}^n$ относительно какой-нибудь гиперплоскости. В результате получится система локальных карт, сохраняющих ориентацию; стало быть, и все функции перехода будут сохранять ориентацию. $\square$

Предложение 31.7. *Гладкое многообразие размерности n ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует дифференциальная форма степени n , нигде не обращающаяся в нуль.*

Доказательство. Пусть ω — форма с таким свойством; зададим на X ориентацию следующим образом. Будем называть базис $v_1, \dots, v_n$ в $\mathcal{T}_x X$ положительно ориентированным, если $\omega_x(v_1, \dots, v_n) > 0$. Тем самым на всех касательных пространствах ориентация задана; в локальных координатах имеем $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, где функция f знакопостоянна на (связной) координатной окрестности, откуда следует, что знак $\omega_x\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ постоянен на координатной окрестности и наше определение ориентации корректно.

Пусть, напротив, многообразие X ориентируемо. Покроем X семейством координатных окрестностей $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ и на каждой U_{α} построим форму ω_{α} степени n , нигде не обращающуюся в нуль и положительную на положительно ориентированных базисах — это возможно, так как все U_{α} диффеоморфны открытым подмножествам в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим теперь разбиение единицы $\{\varphi_{\beta}\}_{\beta \in B}$, подчиненное покрытию $\{U_{\alpha}\}$. Для каждого $\beta \in B$ выберем такое $i(\beta) \in A$, что $\text{supp } \varphi_{\beta} \subset U_{\alpha}$. Положим теперь $\omega = \sum_{\beta} \varphi_{\beta} \omega_{i(\beta)}$ (точнее говоря, суммируются не сами формы $\varphi_{\beta} \omega_{i(\beta)}$, а их продолжения нулем на все X). Ясно, что ω положительна на положительно ориентированных базисах и тем самым не обращается в нуль. $\square$

Приведем теперь еще один, более абстрактный, критерий ориентируемости.

Определение 31.8. Пусть X — связное гладкое n -мерное многообразие. *Оrientирующим накрытием* многообразия X называется много-

образие $\tilde{X}$ вместе с отображением $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, определенное следующим образом.

$\tilde{X}$ как множество. Как множество $\tilde{X}$ состоит из всевозможных пар (x, ε) , где $x \in X$ и ε — одна из двух возможных ориентаций векторного пространства $\mathcal{T}_x X$; отображение π переводит пару (x, ε) в точку $x \in X$.

Локальные карты. Пусть $U \subset X$ — координатная окрестность с локальными координатами $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$; выберем на ней ориентацию и рассмотрим множество пар $(x, \varepsilon) \in \tilde{X}$, где $x \in U$, а ε — соответствующая ориентация $\mathcal{T}_x U = \mathcal{T}_x X$. Функции перехода при этом будут теми же самыми, что для исходного многообразия X .

Топология. Подмножество в $\tilde{X}$ объявим открытым, если открыты в $\mathbb{R}^n$ все его пересечения с координатными окрестностями (точнее, образы этих пересечений относительно локальных карт). Равносильное описание: топология на $\tilde{X}$ — это наименее тонкая топология, при которой отображение π непрерывно.

Из определения очевидно, что отображение $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ является (двухлистным) накрытием.

Предложение 31.9. *Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда его ориентирующее накрытие имеет сечение.*

Доказательство. «Только тогда»: если X ориентируемо, то выберем на нем ориентацию и определим сечение $s: X \rightarrow \tilde{X}$ по формуле $s: x \mapsto (x, \varepsilon)$, где ε — ориентация на $\mathcal{T}_x X$, индуцированная ориентацией многообразия.

«Тогда»: Пусть $s: X \rightarrow \tilde{X}$ — сечение; если $x \in X$ и $s(x) = (x, \varepsilon)$, выберем на $\mathcal{T}_x X$ ориентацию ε . $\square$

Как известно, для всякого двулистного накрытия $\tilde{X} \rightarrow X$, где X связно, имеются две возможности: либо $\tilde{X}$ связно, и в этом случае сечения у накрытия нет, либо $\tilde{X}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфно (а в нашем случае и диффеоморфно) отображается на X , и в этом случае сечений ровно два. Стало быть, либо ориентации у связного многообразия вообще не существует, либо этих ориентаций ровно две штуки.

Следствие 31.10. *Всякое односвязное многообразие ориентируемо.*

Приведем теперь пример неориентируемого многообразия.

Пример 31.11. Покажем, что проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ ориентируемо при нечетном n и неориентируемо при четном n .

Пусть сначала n нечетно. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию на сфере S^n и рассмотрим естественную проекцию (двухлистное накрытие) $p: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$. Очевидно, $p \circ \iota = p$, где ι — антиподальное отображение из примера 31.5. Для каждой точки $x \in \mathbb{RP}^n$ выберем произвольным образом прообраз $y \in p^{-1}(x)$ и перенесем в $\mathcal{T}_x \mathbb{RP}^n$ ориентацию из $\mathcal{T}_y S^n$ с помощью отображения p_* . Поскольку второй прообраз точки x равен $\iota(y)$ и отображение ι при нечетном n сохраняет ориентацию сферы, полученная таким образом ориентация на $\mathcal{T}_x X$ не зависит от выбора прообраза и тем самым определена корректно. Непрерывная зависимость ориентации от точки очевидна.

Пусть теперь n четно. По-прежнему зафиксируем ориентацию на S^n . На сей раз антиподальное отображение сферы ориентацию обращает (см. пример 31.5), так что, если y и $\iota(y)$ — два прообраза точки $x \in \mathbb{RP}^n$ при отображении p , то p_* индуцирует две противоположные ориентации на $\mathcal{T}_x \mathbb{RP}^n$ — одну с точки y , другую с точки $\iota(y)$. Стало быть, всякую пару (x, ε) , где $x \in \mathbb{RP}^n$ и ε — ориентация на $\mathcal{T}_x \mathbb{RP}^n$, можно отождествить с одним из прообразов точки x при отображении p , то есть с точкой на сфере. Легко видеть, что это отождествление является диффеоморфизмом $u: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, совместимым с проекциями на S^n (то есть $\pi \circ u = p$). Стало быть, $\mathbb{RP}^n$ при четном n ориентируемо тогда и только тогда, когда проекция $p: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ имеет сечение, а это неверно при любом n .

Многообразия с краем

Теперь перейдем ко второму ингредиенту нашей теории — многообразиям с краем. Простейшим примером многообразия с краем является замкнутый n -мерный шар в $\mathbb{R}^n$.

Прежде чем давать точные определения, договоримся, в расширении соглашения 30.5, что диффеоморфизмом двух произвольных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ будет называться их гомеоморфизм, продолжающийся до диффеоморфизма некоторых их окрестностей.

Обозначение 31.12. Пусть

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}.$$

Подмножество $H^n \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым полупространством*.

Определение 31.13. n -мерным многообразием с краем называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой.

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α , называемых *координатными окрестностями*.

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, где $V_\alpha \subset H^n$ — открытое подмножество.

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом открытых подмножеств в H^n .

Так как диффеоморфизмы не открытых множеств, как мы их определили, по определению продолжаются до диффеоморфизмов объемлющих открытых множеств, получаем, что при диффеоморфизме открытых подмножеств в H^n точки, лежащие на граничной гиперплоскости, переходят в точки, лежащие на граничной гиперплоскости¹. Стало быть, все точки многообразия с краем делятся на два сорта: точки, образы которых в каких-то (стало быть, и любых) локальных координатах лежат внутри H^n , и точки, образы которых в локальных координатах лежат на границе H^n . Множество точек второго типа называется *краем* многообразия X и обозначается ∂X . Ясно, что край n -мерного многообразия будет $(n - 1)$ -мерным многообразием (уже без края). (Множество точек первого типа, очевидно, является n -мерным многообразием без края.)

Типичный пример многообразия с краем дается следующим предложением, доказательство которого оставляется читателю.

Предложение 31.14. Пусть X — n -мерное гладкое многообразие (без края), и пусть f — гладкая функция на X . Предположим, что $f'(x) \neq 0$ в каждой из точек $x \in X$, для которых $f(x) = 0$. Тогда множество

$$\{x \in X: f(x) \geq 0\}$$

является n -мерным многообразием с краем.

Нетрудно видеть, что при диффеоморфизмах и гладких отображениях открытых подмножеств в H^n корректно определены частные производные и, стало быть, матрицы Якоби. Поэтому на многообразиях с краем также можно определить дифференциальные формы (например, как выражения, записывающиеся в локальных координатах в виде $\sum f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и преобразующиеся по известным правилам при замене локальных координат). Далее, поскольку определены

¹То же верно, если заменить слово «диффеоморфизм» на «гомеоморфизм», но доказывать это надо по-другому.

якобианы функций перехода, можно определить и ориентацию многообразия с краем (например, с помощью системы координатных окрестностей с положительными якобианами функций перехода).

Предложение-определение 31.15. Пусть X — ориентированное n -мерное многообразие с краем. Тогда на ∂X можно ввести *индуцированную ориентацию* следующим образом: объявим базис $(v_1, \dots, v_{n-1})$ в $\mathcal{T}_x \partial X$ положительно ориентированным, если положительно ориентирован базис в $\mathcal{T}_x X$ вида $(e, v_1, \dots, v_{n-1})$, где e — вектор в $\mathcal{T}_x X$, направленный «наружу» многообразия. Последнее, по определению, означает, что в каких-то (стало быть, и в любых) локальных координатах вектор e переходит в вектор $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ с *отрицательным* a_1 .

Нетрудно видеть, что это действительно корректное определение ориентации. В частности, при ином выборе «направленного наружу» вектора e ориентация базиса не изменится.

Теорема Стокса

Теперь все готово для того, чтобы дать основные определения. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ какую-нибудь ориентацию.

Предложение 31.16. Пусть X — n -мерное ориентированное многообразие (возможно, с краем). Пусть $\varphi: U \rightarrow X$ — локальная карта, сохраняющая ориентацию, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, и пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — такая дифференциальная форма, что $\text{supp } \omega$ компактен и содержится в $\varphi(U)$. Если $\varphi^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, то интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$ не зависит от выбора сохраняющей ориентацию локальной карты.

Доказательство. Пусть $\psi: V \rightarrow X$ — другая локальная карта, сохраняющая ориентацию и такая, что $\text{supp } \omega \subset \psi(V)$; положим $\psi^* \omega = g dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$. Поскольку обе карты сохраняют ориентацию, якобиан $\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}$ положителен и тем самым совпадает со своей абсолютной величиной. Стало быть, по теореме о замене переменных имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} g dy_1 \dots dy_n,$$

что и требовалось. $\square$

Доказанное предложение показывает, что следующее определение корректно.

Определение 31.17. Пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — дифференциальная форма, где X — ориентированное n -мерное многообразие с краем. Предположим, что $\text{supp } \omega$ компактен и содержится в $\varphi(U)$, где $\varphi: U \rightarrow X$ — сохраняющая ориентацию локальная карта. Тогда *интегралом формы ω по многообразию X* называется число $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$, где $\varphi^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Обозначение: $\int_X \omega$.

Предложение-определение 31.18. Пусть ω — дифференциальная форма степени n с компактным носителем на n -мерном многообразии с краем X . Тогда *интегралом от формы ω по многообразию X* называется число $\sum \int_X f_i \omega$, где $\{f_i\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию X координатными окрестностями, а интегралы понимаются в смысле определения 31.17. От выбора разбиения единицы это число не зависит; обозначается оно $\int_X \omega$.

Доказательство полностью аналогично доказательству корректности определения интеграла от плотности в лекции 28.

Наконец, последнее определение.

Определение 31.19. Пусть X — многообразие (возможно, с краем), $Y \subset X$ — ориентированное подмногообразие размерности k , и $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда полагаем по определению $\int_Y \omega = \int_Y i^* \omega$, где $i: Y \rightarrow X$ — включение.

Теперь наконец можно сформулировать теорему Стокса.

Теорема 31.20 (теорема Стокса: второй вариант). Пусть X — n -мерное ориентированное многообразие с краем и $\omega \in \Omega^{n-1}(X)$ — дифференциальная форма с компактным носителем. Тогда

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega,$$

где ориентация на ∂X индуцирована ориентацией на X в смысле определения 31.15.

Доказательство. Можно, очевидно, ограничиться случаем, когда $\text{supp } \omega \subset \varphi(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и φ — сохраняющая ориентацию локальная карта. Положим $\varphi^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ и разберем два случая.

1. U не пересекается с границей $\mathbb{R}^n$. В этом случае $\int_{\partial X} \omega = 0$, но и $\int_X d\omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = 0$ (сведите интеграл к повторному, начав с интегрирования по dx_i , и примените формулу Ньютона—Лейбница).

2. U имеет непустое пересечение с границей H^n . Если $i \neq 1$, то левая часть формулы равна нулю, так как $\omega|_{\partial X} = 0$, а правая часть равна нулю по той же причине, что и в первом случае (повторное интегрирование можно начать с интегрирования по $\mathbb{R}$ производной по x_i от гладкой функции с компактным носителем). Если, наконец, $i = 1$, то правая часть равна $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n$, а левая часть равна $-\int_{R^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$ (знак «минус» возник, так как базис $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в касательном пространстве к ∂H^n отрицательно ориентирован в соответствии с нашим определением индуцированной ориентации). Теперь совпадение левой и правой частей немедленно получается с помощью повторного интегрирования, начинающегося с интегрирования по dx_1 (применить все ту же формулу Ньютона—Лейбница). $\square$

Следствие 31.21. Если ω — дифференциальная форма степени $n - 1$ (с компактным носителем) на ориентированном n -мерном многообразии X без края, то $\int_X d\omega = 0$.

32. Два слова о когомологиях де Рама

Хотя ряд понятий топологии $\langle \dots \rangle$ и вводится без особого труда, попытки их серьезно использовать в простейших примерах неизбежно требуют развития некоторого аппарата, не представленного никакими аналогиями в классической математике.

Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

Начнем с такого определения.

Определение 32.1. Пусть ω — дифференциальная форма на многообразии. Говорят, что ω замкнута, если $d\omega = 0$, и точна, если существует такая форма η , что $\omega = d\eta$.

Из предложения 29.15 следует, что всякая замкнутая форма является точной. Стало быть, имеет смысл следующее определение.

Определение 32.2. Пусть X — гладкое многообразие. k -й группой когомологий де Рама многообразия X называется фактор пространства замкнутых k -форм по пространству точных k -форм¹. Обозначение: $H_{\text{DR}}^k(X)$.

¹Разумеется, это не просто группа, а векторное пространство над $\mathbb{R}$, но так уж говорят.

Обратный образ замкнутой формы при гладком отображении будет замкнут (если $d\omega = 0$, то $d(f^*\omega) = f^*d\omega = 0$), а обратный образ точной формы будет точен. Поэтому всякое гладкое отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм групп (векторных пространств) когомологий де Рама $f^*: H_{\text{DR}}^i(Y) \rightarrow H_{\text{DR}}^i(X)$, направленный «против течения» (для простоты этот гомоморфизм обозначается так же, как обратный образ дифференциальной формы). Ясно, что $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ (то же соотношение, что для обратных образов форм).

Познакомимся с когомологиями де Рама поближе. По самому определению, $H_{\text{DR}}^k(X) = 0$, если k отрицательно или больше $\dim X$. Найдем $H_{\text{DR}}^0(X)$. Точных форм степени нуль вообще нет (так как нет форм степени -1), а замкнутые формы степени нуль — это функции с нулевым дифференциалом. Поскольку в локальных координатах у такой функции все частные производные равны нулю, получаем, что пространство замкнутых 0-форм на X (оно же $H_{\text{DR}}^0(X)$) есть пространство функций, постоянных на компонентах связности многообразия X . В частности, если X связно, то $H_{\text{DR}}^0(X) = \mathbb{R}$.

Попробуем посчитать что-нибудь еще.

Предложение 32.3. Если $X = \mathbb{R}$, то $H_{\text{DR}}^0(X) = \mathbb{R}$, $H_{\text{DR}}^1(X) = 0$.

Доказательство. Только утверждение про H_{DR}^1 нуждается в доказательстве. По соображениям размерности всякая 1-форма на прямой замкнута; с другой стороны, всякая 1-форма на прямой будет и точна: если $\omega = f(x) dx$, то $\omega = dF$, где F — любая первообразная функции f . $\square$

Предложение 32.3 обобщается на произвольную размерность:

Предложение 32.4. $H_{\text{DR}}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $H_{\text{DR}}^i(\mathbb{R}^n) = 0$ при $i > 0$.

Доказательство. Всякая $\omega \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$ единственным образом записывается в виде

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} f_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Для $0 \leq r \leq n$ обозначим через Ω_k^r пространство r -форм, в записи которых не участвуют dx_j при $j > k$ (в частности, $\Omega_0^r = \{0\}$, а $\Omega_n^r = \Omega^r(\mathbb{R}^n)$). Докажем индукцией по k следующее утверждение:

если $r > 0$ и форма $\omega \in \Omega_k^r$ замкнута, то $\omega = d\eta$ для некоторой $\eta \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$.

При $k = 0$ доказывать нечего. Пусть для k наше утверждение доказано, и пусть $\omega \in \Omega_{k+1}^r$ — замкнутая форма; имеем $\omega = \omega_1 + dx_{k+1} \wedge \omega_2$, где $\omega_1 \in \Omega_k^r$ и $\omega_2 \in \Omega_{k+1}^{r-1}$. Так как $d\omega = 0$, имеем

$$d\omega_1 = dx_{k+1} \wedge d\omega_2. \quad (32.1)$$

Поскольку $\omega_1 \in \Omega_k^r$, в левой части (32.1) отсутствуют слагаемые, содержащие dx_{k+1} , и dx_j при $j > k + 1$; так как в правой части все слагаемые содержат dx_{k+1} , слагаемых в левой части, содержащих dx_j при $j > k + 1$, нет. Стало быть, слагаемых, содержащих dx_j при $j > k + 1$, нет и в правой части, так что, если

$$\omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq k} f_{i_1, \dots, i_{r-1}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}},$$

то $\partial f_{i_1, \dots, i_{r-1}} / \partial x_j = 0$ при $j > k + 1$. Теперь для $1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq k$ положим

$$F_{i_1, \dots, i_{r-1}}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_k} f(x_1, \dots, x_k, t, x_{k+2}, \dots, x_n) dt.$$

Ясно, что $\partial F_{i_1, \dots, i_{r-1}} / \partial x_{k+1} = f_{i_1, \dots, i_{r-1}}$ и что $F_{i_1, \dots, i_{r-1}}$ не зависит от x_j при $j > k + 1$. Положим теперь

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq k} F_{i_1, \dots, i_{r-1}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}}.$$

Тогда $d\eta = dx_{k+1} \wedge \omega_2 + \omega'$, где $\omega' \in \Omega_k^r$. Стало быть, $\omega - d\eta \in \Omega_k^r$; поскольку, очевидно, $d(\omega - d\eta) = 0$, имеем по предположению индукции $\omega - d\eta = d\eta'$ для некоторой $\eta' \in \Omega^{r-1}(\mathbb{R}^n)$, откуда $\omega = d(\eta + \eta')$, и утверждение доказано.

При $k = n$ доказанное утверждение совпадает с предложением 32.4. $\square$

Поскольку открытый шар в $\mathbb{R}^n$ диффеоморфен $\mathbb{R}^n$, а каждая точка на n -мерном гладком многообразии (без края) обладает окрестностью, диффеоморфной шару в $\mathbb{R}^n$, из предложения 32.4 вытекает такое предложение.

Предложение 32.5 (лемма Пуанкаре). Пусть ω — дифференциальная форма положительной степени на многообразии X . Если ω замкнута, то для всякой точки $x \in X$ найдутся такие окрестность $U \ni x$ и дифференциальная форма η на U , что $\omega|_U = d\eta$.

Иными словами, всякая замкнутая форма локально точна. Тем самым когомологии де Рама, измеряющие, насколько замкнутые формы

отличаются от точных, несут в себе информацию о том, каким образом многообразие склеено из простейших кусков — окрестностей, диффеоморфных шарам.

К сожалению, для того, чтобы дать достаточное количество примеров вычисления когомологий, у нас не хватит техники. «Вручную» можно сделать лишь совсем немного.

Предложение 32.6. *Если X — компактное ориентируемое многообразие (без края) размерности n , то $H_{\text{DR}}^n(X, \mathbb{R}) \neq 0$.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию многообразия X . Согласно предложению 31.7, существует такая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n(X)$, что $\omega_x(v_1, \dots, v_n) > 0$ для всякой точки $x \in X$ и для всякого положительно ориентированного базиса $(v_1, \dots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x X$. Стало быть, в любых сохраняющих ориентацию локальных координатах форма ω записывается в виде $f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, где функция f всюду положительна, так что из определения интеграла формы по ориентированному многообразию ясно, что $\int_X \omega$ является суммой положительных чисел; в частности, $\int_X \omega \neq 0$. Следствие из теоремы Стокса (следствие 31.21) показывает, что форма ω не является точной; с другой стороны, она замкнута по соображениям размерности. Следовательно, ω представляет ненулевой n -мерный класс когомологий. $\square$

На самом деле верно более точное утверждение, которое мы уже не докажем.

Предложение 32.7. *Пусть X — компактное n -мерное многообразие. Если X ориентируемо, то $H_{\text{DR}}^n(X) = \mathbb{R}$, а если X неориентируемо, то $H_{\text{DR}}^n(X) = 0$.*

Скажем еще кое-что о связи когомологий де Рама с сингулярными цепями. Пусть ω — дифференциальная форма степени k на многообразии X . Тогда ее можно рассматривать как функцию на множестве всех k -мерных (гладких) сингулярных симплексов, действующую по правилу $\sigma \mapsto \int_\sigma \omega$. Ясно, что при этом какая попало функция получится не может: интеграл данной формы по симплексу должен «непрерывно» зависеть от симплекса (при любом разумном определении понятия непрерывности). Отбросим теперь всякие ограничения на зависимость «интеграла» от симплекса:

Определение 32.8. Пусть X — k -мерное многообразие. k -мерной цепью на многообразии X с коэффициентами в $\mathbb{R}$ называется отображение c из множества k -мерных сингулярных симплексов в $\mathbb{R}$. Множе-

ство k -мерных коцепей обозначается $C^k(X)$; оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$ (если c_1 и c_2 — коцепи, то $(c_1 + c_2)(\sigma) = c_1(\sigma) + c_2(\sigma)$; аналогично с умножением на число).

Коцепь, ставящую в соответствие симплексу σ число $\int_{\omega} \sigma$, где ω — фиксированная k -форма, будем обозначать c_{ω} .

Итак, коцепи — это обобщение дифференциальных форм; следующая конструкция является обобщением внешнего дифференциала.

Определение 32.9. Пусть $c \in C^k(X)$. *Кограницей* коцепи c называется $(k+1)$ -мерная коцепь dc , действующая по правилу

$$(dc)(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i c(\partial_i \sigma).$$

При соответствии $\omega \mapsto c_{\omega}$ внешний дифференциал переходит в кограницу:

Предложение 32.10. Пусть $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда $d(c_{\omega}) = c_{d\omega}$ (в левой части d означает кограницу, в правой — внешний дифференциал).

Доказательство. Это переформулировка первого варианта теоремы Стокса (теорема 30.15). $\square$

Можно рассматривать коцепи как функции на сингулярных цепях, если для коцепи c положить $c(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i c(\sigma_i)$. В таких обозначениях определение кограницы записать совсем просто: $(dc)(\sigma) = c(\partial \sigma)$.

Предложение 32.11. Пусть c — сингулярная коцепь. Тогда $d(dc) = 0$.

Доказательство. Это прямое следствие предложения 30.14: $ddc(\sigma) = (dc)(\partial \sigma) = c(\partial \partial \sigma) = 0$. $\square$

Следующее определение полностью параллельно определению 32.2.

Определение 32.12. Пусть X — гладкое многообразие. k -мерная коцепь c , для которой $dc = 0$, называется *k -мерным коциклом*. k -мерная коцепь c , являющаяся кограницей $(k-1)$ -мерной коцепи, называется *k -мерной кограницей*. *k -й группой (сингулярных) когомологий многообразия X с коэффициентами в $\mathbb{R}$* называется фактор пространства k -коциклов по подпространству k -кограниц (предложение 32.11 показывает, что всякая кограница является коциклом). Обозначение: $H^k(X, \mathbb{R})$.

(В стандартном определении сингулярных когомологий коцепи, как известно, определяются как функции на множестве всех — а не только

гладких — сингулярных симплексов; эквивалентность нашего определения стандартному проверяется с помощью так называемого «метода ациклических носителей».)

Предложение 32.10 показывает, что при отображении $\omega \mapsto c_\omega$ замкнутые формы переходят в коциклы, а точные формы — в кограницы. Следовательно, отображение $\omega \mapsto c_\omega$ индуцирует естественный гомоморфизм $H_{\text{DR}}^k(X) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R})$.

Теорема 32.13 (теорема де Рама). *Гомоморфизм $H_{\text{DR}}^k(X) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R})$, индуцированный отображением $\omega \mapsto c_\omega$, является изоморфизмом.*

Доказать теорему де Рама мы в этом курсе не сможем — для этого требуется либо довольно серьезная гомологическая алгебра, либо довольно серьезный анализ.

33. Теорема Фробениуса

Задача, которую мы будем изучать, является прямым обобщением задачи об интегрировании поля прямых.

В этой лекции слово «многообразие» означает «многообразие без края».

Определение 33.1. *Полем k -мерных плоскостей, или k -мерным распределением* на гладком многообразии X называется семейство k -мерных векторных подпространств $V_x \subset \mathcal{T}_x$ для всякого $x \in X$, гладко зависящих от точки x .

Определение 33.2. Говорят, что k -мерное распределение $\{V_x\}$ на многообразии X является *интегрируемым*, если для всякой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \ni x$ и замкнутое k -мерное подмногообразие $Y \subset U$, обладающее тем свойством, что для всякой точки $y \in Y$ выполнено равенство $\mathcal{T}_y Y = V_y \subset \mathcal{T}_y X$.

k -мерные подмногообразия, о которых идет речь в этом определении, называются *интегральными многообразиями* распределения $\{V_x\}$.

Если $k = 1$, то всякое одномерное распределение (оно же поле прямых) интегрируемо. В самом деле, обозначим размерность многообразия X через $n + 1$ (чтобы формулы получились более привычными); ввиду локальности задачи можно считать, что X — открытое подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $(t, x_1, \dots, x_n)$ и выберем систему координат таким образом, чтобы ни одна из прямых V_y для y , близких к x , не была «вертикальна» — параллельна оси t .

Тогда прямую, проходящую через точку $x = (t_0, x_1, \dots, x_n)$, можно задать параметрическими уравнениями

$$t \mapsto (t_0 + t, x_1 + v_1(t, x_1, \dots, x_n)t, \dots, x_n + v_n(t, x_1, \dots, x_n)t),$$

и при этом интегральные многообразия — просто интегральные кривые дифференциального уравнения $x' = v(t, x)$, где $v = (v_1, \dots, v_n)$.

При $k > 1$, напротив, существуют неинтегрируемые распределения, причем неинтегрируемость возникает не из-за недостаточной гладкости, а по более фундаментальным — «общегеометрическим» — причинам. Вот простейший и типичный пример.

Рассмотрим форму $\omega = dz - x dy$ в $\mathbb{R}^3$. На каждом касательном пространстве она определяет ненулевой линейный функционал, так что ядра этих функционалов определяют поле 2-плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что это поле интегрируемо. На каждой вертикальной плоскости в $\mathbb{R}^3$ наше поле плоскостей высекает поле прямых; стало быть, пересечения интегральных подмногообразий с этими плоскостями должны быть интегральными кривыми этих полей. Ограничение формы ω на плоскости, задаваемые уравнениями $y = \text{const}$ или $x = 0$, имеет вид dz , так что на них интегральные многообразия должны высекать горизонтальные прямые; ограничение на плоскость, заданную уравнением $x = \varepsilon$, имеет вид $dz - \varepsilon dy$, так что на ней должны высекаться прямые, наклоненные под углом $\arctg \varepsilon$ к горизонтальной плоскости. Стало быть (см. рис. 6), интегральное многообразие, проходящее через начало координат, должно пересекаться с вертикальной прямой, проходящей че-

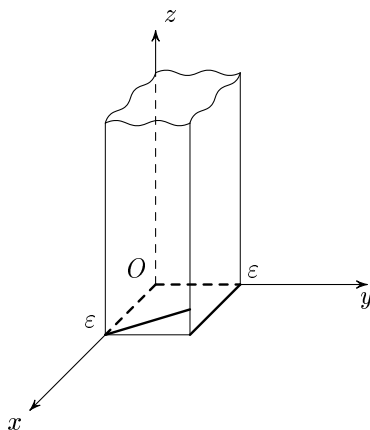


Рис. 6. Пример неинтегрируемости

рез точку $(\varepsilon, \varepsilon, 0)$, в двух различных точках, что при малых ε невозможно, поскольку в начале координат касательная плоскость к этому интегральному многообразию горизонтальна.

Теорема Фробениуса, которой посвящена эта лекция, дает необходимое и достаточное условие интегрируемости k -мерного распределения.

Заметим для начала, что, как легко видеть, коммутатор двух векторных полей, касающихся подмногообразия $Y \subset X$, также касается подмногообразия Y . Тем самым очевидна часть «только тогда» в следующей теореме.

Теорема 33.3 (теорема Фробениуса). *k -мерное распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда для любых двух векторных полей v и w , касающихся распределения, их коммутатор также касается распределения. (Говорят, что векторное поле v касается распределения $\{V_x\}$, если для всякого $x \in X$ имеем $v_x \in V_x$.)*

Доказательство. Будем говорить, что k -мерное распределение на n -мерном многообразии задано векторными полями $v_1, \dots, v_k$, если для каждой точки $x \in X$ касательные векторы $(v_1)_x, \dots, (v_k)_x$ образуют базис векторного пространства $V_x \subset T_x X$.

(Важное предупреждение: далеко не всякое k -мерное распределение можно задать с помощью k определенных на всем многообразии линейно независимых векторных полей!)

Лемма 33.4. *Пусть k -мерное распределение на n -мерном многообразии задано векторными полями $v_1, \dots, v_k$, для которых $[v_i, v_j] = 0$ при всех i и j . Тогда это распределение интегрируемо.*

Доказательство леммы. Поскольку задача локальна, можно считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x \in X$; обозначим через $g_1^1, \dots, g_1^k$ локальные фазовые потоки (в точке x), соответствующие векторным полям $v_1, \dots, v_k$ соответственно. Пусть V — достаточно малая окрестность нуля в $\mathbb{R}^k$; рассмотрим отображение $\Phi: V \rightarrow U$, заданное формулой

$$(t_1, \dots, t_k) \mapsto g_{t_1}^1 \circ \dots \circ g_{t_k}^k(x). \quad (33.1)$$

Ясно, что Φ гладко. Покажем, что существует содержащая x окрестность $V' \subset V$, для которой $\Phi(V')$ — интегральное подмногообразие. В самом деле, пусть $t = (t_1, \dots, t_k) \in V$ и $\Phi(t) = y \in U$. Тогда из определения фазового потока явствует, что $\Phi'(t)(\partial/\partial t_k) = v_k(y)$. Поскольку, однако, поля v_j попарно коммутируют, предложение 27.9 показывает, что коммутируют и соответствующие фазовые потоки. Уменьшим окрестность V таким образом, чтобы для всякого $t \in V$ были опре-

делены композиции $g_t^{i_1} \circ \dots \circ g_t^{i_k}(x)$ для всех возможных перестановок индексов $i_1, \dots, i_k$. Тогда имеем равенство $\Phi'(t)(\partial/\partial t_j) = v_j(y)$ для всякого j (поскольку в (33.1) можно переставить преобразования так, чтобы g^j применялось последним). Тем самым для всякого $t \in V$ имеем $\Phi'(t)(\mathcal{T}_t V) = V_{\Phi(t)}$; в частности, Φ является иммерсией; уменьшая еще V , получим, что Φ — вложение, образ которого — интегральное многообразие, проходящее через x . $\square$

Теперь завершим доказательство теоремы Фробениуса. По-прежнему можно считать, что X — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; построим интегральное многообразие, проходящее через точку $x \in X$. Для этого выберем в $\mathbb{R}^n$ систему координат $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}$ таким образом, чтобы при проекции π на первые k координат пространство V_x изоморфно отображалось на $\mathbb{R}^k$; уменьшая при необходимости открытое множество X , можно считать, что изоморфизмом является и всякая проекция $\pi_p = \pi'(p)|_{V_p} \rightarrow \mathbb{R}^k$ для $p \in X$. Рассмотрим векторные поля $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_k$ на $\mathbb{R}^k$; в силу сказанного выше они однозначно поднимаются до векторных полей $v_1, \dots, v_k$ на X , касающихся распределения (подробнее: $v_j(p) \in V_p$ и $\pi'(p)(v_j(p)) = \partial/\partial x_j$ для всякого $p \in X$ при $1 \leq j \leq k$). В координатах имеем

$$v_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum \varphi_{jm} \frac{\partial}{\partial y_m}. \quad (33.2)$$

Нетрудно видеть, что коммутатор любых двух полей v_i и v_j является линейной комбинацией $\partial/\partial y_m$ при $1 \leq m \leq n - k$. По условию, эти коммутаторы должны касаться распределения, но при нашем выборе координат линейная комбинация касательных векторов $\partial/\partial y_m$ может лежать в каком-то V_p только если эта линейная комбинация равна нулю. Стало быть, поля $v_1, \dots, v_k$ попарно коммутируют, и искомая интегрируемость вытекает из леммы. $\square$

Распределение можно задавать не только с помощью множества касающихся его векторных полей, но и другими способами; соответственно, и теорема Фробениуса будет при этом формулироваться иначе. Приведем две такие переформулировки.

Во-первых, можно задать распределение не с помощью векторных полей, а двойственным образом — с помощью дифференциальных форм. Ограничимся для простоты случаем распределений коразмерности 1. Итак, пусть на n -мерном многообразии X задана дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(X)$, нигде не обращающаяся в нуль. Тогда соответствие $x \mapsto \text{Ker}(\omega)_x$ задает распределение коразмерности 1 на многообразии X (всякое распределение коразмерности 1 допускает такое

задание локально, но не обязательно глобально! Ср. предупреждение выше).

Предложение 33.5. Пусть на n -мерном многообразии X задана 1-форма ω , нигде не обращающаяся в нуль. Тогда $(n-1)$ -мерное распределение $\{V_x\}$, задаваемое этой формой, будет интегрируемо тогда и только тогда, когда $d\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Пусть v и w — векторные поля, касающиеся распределения $\{V_x\}$. По определению это означает, что $\omega(v) = \omega(w) = 0$. Легко видеть, что для всяких 1-формы ω и векторных полей v и w выполнено следующее равенство:

$$(d\omega)(v, w) = v(\omega(w)) - w(\omega(v)) - \omega([v, w]) \quad (33.3)$$

(это частный случай так называемой формулы Картана, с помощью которой в таких терминах записывается дифференциал формы произвольной степени). Если v и w касаются распределения, заданного формой ω , то из (33.3) вытекает, что $\omega_i([v, w]) = -(d\omega_i)(v, w)$. Поэтому предложение сразу следует из такой чисто алгебраической леммы:

Лемма 33.6. Пусть ω и λ — линейный функционал и кососимметрическая 2-форма на конечномерном векторном пространстве E . Тогда ограничение λ на $\text{Ker } \omega$ равно нулю в том и только том случае, когда $\lambda \wedge \omega = 0$.

Для доказательства леммы заметим, что

$$(\omega \wedge \lambda)(e_1, e_2, e_3) = \omega(e_1)\lambda(e_2, e_3) + \omega(e_2)\lambda(e_3, e_1) + \omega(e_3)\lambda(e_1, e_2)$$

для всяких $e_1, e_2, e_3 \in E$, и выберем базис $e_1, \dots, e_n$ в E таким образом, чтобы $e_2, \dots, e_n$ порождали $\text{Ker } \omega$. Тогда $(\omega \wedge \lambda)(e_i, e_j, e_k) = 0$, если никто из i, j, k не равен 1, и $(\omega \wedge \lambda)(e_1, e_j, e_k) = \omega(e_1)\lambda(e_j, e_k)$, причем $\omega(e_1) \neq 0$. Отсюда лемма, а тем самым и предложение, следует с очевидностью. $\square$

Наша вторая переформулировка теоремы Фробениуса есть не что иное, как запись ее утверждения в координатах. Именно, пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, на котором задано k -мерное распределение $\{V_p\}$. Уменьшив, если нужно, множество U , можно считать, что все k -мерные подпространства V_x изоморфно проектируются на подпространство, порожденное первыми k координатными векторами. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде произведения $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ и будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^n$ через $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})$. Тогда k -мерное пространство V_p , где $p = (x, y)$, можно рассмотреть как график линейного отображения из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$ с матрицей f_{ij} , где f_{ij} — функции

иными словами, мы снова получили набор векторных полей вида (33.2). Как мы видели при доказательстве теоремы Фробениуса, условие интегрируемости для распределения, порожденного этими векторными полями, выполнено тогда и только тогда, когда они попарно коммутируют. Если вычислить «в лоб» эти коммутаторы, то окажется, что условие их равенства нулю идентично условиям (33.5). Предоставляем читателю проделать выкладки самостоятельно. $\square$

34. Пространства L^1 и L^2

Вернемся к локальной теории.

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Суммируемые функции на X образуют векторное пространство, а функции, равные нулю почти всюду, образуют в нем векторное подпространство.

Определение 34.1. Через $L^1(X, \mu)$ (если нет опасности путаницы, то $L^1(X)$ или просто L^1) обозначается фактор пространства суммируемых функций по подпространству функций, равных нулю почти всюду.

Если $f \in L^1$, то полагаем $\|f\|_1 = \int_X |f(x)| d\mu(x)$.

Мы не уточняли в этом определении, принимают функции вещественные или комплексные значения. В первом случае, естественно, L^1 будет векторным пространством над $\mathbb{R}$, во втором — над $\mathbb{C}$. Допуская вольность речи, мы не будем различать элементы L^1 и представляемые ими функции. К путанице это обычно не приводит.

Наряду с пространством суммируемых функций важную роль играет пространство функций, «суммируемых с квадратом». Вот определение.

Определение 34.2. Измеримая функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, где (X, μ) — пространство с мерой, называется суммируемой с квадратом, если $|f|^2 \in L^1$, т. е. $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$.

Если $f \in L^2$, то полагаем $\|f\|_2 = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$.

Предложение 34.3. Суммируемые с квадратом функции образуют векторное пространство. Если f и g суммируемы с квадратом, то функция fg суммируема.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что множество суммируемых с квадратом функций замкнуто относительно сложения, но это вытекает из очевидного не-

равенства $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$. Второе утверждение вытекает из не менее очевидного неравенства $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2)/2$. $\square$

Обозначение 34.4. Через $L^2(X, \mu)$ обозначается фактор пространства суммируемых с квадратом (комплекснозначных) функций по подпространству функций, равных нулю почти всюду.

Если $f, g \in L^2$, то полагаем $(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ и $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$.

Имеется также вариант этого определения для функций со значениями в $\mathbb{R}$, а не $\mathbb{C}$. Единственное отличие — отсутствие комплексного сопряжения в определении (f, g)

Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ вводят на L^1 и L^2 структуру нормированного векторного пространства (см. определение 17.1).

В самом деле, для L^1 очевидна выполнимость всех условий из определения нормы, кроме того, что из $\|v\| = 0$ следует $v = 0$. Это последнее сразу вытекает из такой леммы.

Лемма 34.5. Если $f: X \rightarrow [0; +\infty)$ — измеримая функция и $\int_X f d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ для почти всех $x \in X$.

Доказательство. Положим $E_n = f^{-1}([1/n; +\infty))$. Если $\mu(E_n) > 0$ для какого-то $n \in \mathbb{N}$, то $\int_X f d\mu \geq \mu(E_n)/n > 0$. Если же все E_n имеют меру нуль, то нулевую меру имеет и $f^{-1}(0; +\infty) = \bigcup_n E_n$. $\square$

(Именно ради того, чтобы нормы ненулевых элементов были ненулевыми, и вводится факторизация в определении L^1 и L^2 .)

Что касается L^2 , то из предложения 34.3 явствует, что $(\cdot, \cdot)$ задает на L^2 неотрицательно определенную эрмитову форму, откуда немедленно следуют все утверждения, кроме импликации $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$; эта последняя также вытекает из леммы 34.5.

Следствие 34.6 (неравенство Коши—Буняковского). Если $f, g \in L^2$, то $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

На всяком нормированном пространстве имеется естественная метрика, задаваемая по правилу $\rho(v, w) = \|v - w\|$ и, тем самым, естественная топология, задаваемая этой метрикой. В дальнейшем, говоря о нормированном пространстве, мы будем подразумевать, что на нем задана эта метрика и эта топология.

Предложение 34.7. Пусть V, W — нормированные векторные пространства. Линейное отображение $A: V \rightarrow W$ непрерывно (относительно топологий, задаваемых нормами в V и W) тогда и только то-

гда, когда существует такая константа $M > 0$, что $\|A(v)\| \leq M\|v\|$ для всех $v \in V$.

Доказательство. Если $\|A(v)\| \leq M\|v\|$ для всех v , то $\|A(v) - A(w)\| < \varepsilon$, как только $\|v - w\| < \varepsilon/M$, откуда непрерывность очевидна.

Чтобы доказать обратное утверждение, заметим, что, коль скоро отображение A непрерывно, оно, в частности, непрерывно и в нуле; стало быть, существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|v\| \leq \delta$ следует неравенство $\|A(v)\| \leq 1$. Теперь для всякого $v \in V$ имеем

$$\|A(v)\| = \|A(\delta^{-1}\|v\| \cdot \delta\|v\|^{-1}v)\| = \delta^{-1}\|v\| \cdot \|A(\delta\|v\|^{-1}v)\| \leq \delta^{-1}\|v\|,$$

поскольку, очевидно, $\|\delta\|v\|^{-1}v\| = \delta$. $\square$

Следствие 34.8 (из доказательства). *Линейное отображение нормированных пространств непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле.*

Теорема 34.9. *Пространства L^1 и L^2 полны как метрические пространства.*

Доказательство. Проведем доказательство для L^2 (для L^1 оно аналогично и проще).

Итак, пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функций, суммируемых с квадратом. Для доказательства ее сходимости достаточно доказать, что в ней найдется сходящаяся подпоследовательность. Далее, если $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в произвольном метрическом пространстве, то у нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, обладающую тем свойством, что $\rho(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$ при всех k (так как в пополнении у этой последовательности есть некоторый предел f , достаточно выбрать n_k так, чтобы $\rho(f_{n_k}, f) \leq 1/2^{k+1}$). Итак, существует подпоследовательность, для которой $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_2 \leq 1/2^k$. Обозначим $f_{n_k} = g_k$; нам достаточно показать, что последовательность $\{g_k\}$ сходится в L^2 .

По неравенству Коши—Буняковского имеем, для всякого натурального n ,

$$\begin{aligned} \| |g_2 - g_1| + \dots + |g_{n+1} - g_n| \|_2 &\leq \\ &\leq \|g_2 - g_1\|_2 + \dots + \|g_{n+1} - g_n\|_2 \leq \sum_{k>0} \frac{1}{2^k} = 1; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_X (|g_2 - g_1| + \dots + |g_{n+1} - g_n|)^2 d\mu \leq 1 \quad (34.1)$$

при всех $n > 0$. Положим

$$\varphi_n = (|g_2 - g_1| + \dots + |g_{n+1} - g_n|)^2;$$

последовательность $\{\varphi_n\}$ является возрастающей, и ввиду (34.1) имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n d\mu < \infty$, так что из теоремы Беппо Леви вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) < \infty$ при почти всех x . Стало быть, при почти всех $x \in X$ конечен и предел последовательности $\{\sqrt{\varphi_n(x)}\}$, а это значит, что при почти всех x сходится (абсолютно) ряд $\sum_n (g_{n+1}(x) - g_n(x))$ и тем самым последовательность $\{g_n(x)\}$; обозначим предел этой последовательности через $g(x)$ там, где он существует, и присвоим $g(x)$ произвольные значения для тех x , для которых предела нет. Мы утверждаем, что функция g суммируема с квадратом и что $g_n \rightarrow g$ в $L^2(X, \mu)$.

В самом деле, для любых целых положительных k и n имеем

$$\|g_k - g_{k+n}\|_2 \leq \|g_k - g_{k+1}\|_2 + \dots + \|g_{k+n-1} - g_{k+n}\|_2 \leq \sum_{j \geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

так что $\int_X |g_k - g_{k+n}|^2 d\mu \leq 1/4^{k-1}$. Устремляя в этом неравенстве n к бесконечности и применяя лемму Фату (предложение 15.19), получаем, что

$$\int_X |g_k - g|^2 d\mu \leq \frac{1}{4^{k-1}}. \quad (34.2)$$

В частности, функция $g_k - g$ суммируема с квадратом; поскольку g_k суммируема с квадратом по условию, функция g_k тоже суммируема с квадратом, так что $g \in L^2(X, \mu)$. Наконец, из (34.2) явствует, что $\|g_k - g\|_2 \leq 1/2^{k-1}$, откуда $g_k \rightarrow g$ в L^2 . Теорема доказана. $\square$

Определение 34.10. Векторное пространство H , снабженное положительно определенной эрмитовой (в вещественном случае — симметрической) формой, называется *гильбертовым пространством*, если оно полно относительно метрики, задаваемой соответствующей нормой.

(Некоторые авторы включают еще в определение условие, чтобы H содержало счетное плотное подмножество.)

Как мы только что установили, примером гильбертова пространства является $L^2(X, \mu)$.

Гильбертовы пространства применяются в анализе очень широко. В нашем курсе мы ограничимся тем, что установим два важных общих факта о них.

Именно, пусть H — вещественное векторное пространство с положительно определенной евклидовой метрикой или комплексное векторное пространство с положительно определенной эрмитовой метрикой (про полноту пока ничего не предполагаем). Для определенности будем далее считать H вещественным: в комплексном случае доказательства аналогичны. Если $V \subset H$ — векторное подпространство, то можно рассмотреть его *ортogonalное дополнение*

$$V^\perp = \{w \in H : (v, w) = 0 \text{ для всех } v \in V\}.$$

Как известно (и тривиально проверяется), $V^\perp$ — векторное подпространство в H и $V \cap V^\perp = 0$.

Предложение 34.11. Пусть V — замкнутое векторное подпространство в гильбертовом пространстве H . Тогда:

- (1) $V^\perp$ замкнуто;
- (2) $H = V \oplus V^\perp$;
- (3) $(V^\perp)^\perp = V$.

(Все это заведомо верно, если $\dim H < \infty$.)

Доказательство. Утверждение (1) очевидно; докажем (2). Нам достаточно показать, что каждый $w \in H$ представляется в виде $v + v_1$, где $v \in V$ и $v_1 \in V^\perp$.

Лемма 34.12. Пусть вектор $v \in V$ таков, что $\|w - v\| \leq \|w - v'\|$ для всех $v' \in V$. Тогда $w - v \in V^\perp$.

Доказательство леммы. Можно, разумеется, считать, что $w \notin V$. Пусть $(w - v, v') \neq 0$ для некоторого $v' \in V$. Заметим, что плоскость, порожденная векторами $w - v$ и v' , есть обыкновенная евклидова плоскость; если $w - v$ и v' не перпендикулярны, то на прямой, содержащей v' , найдется точка, лежащая ближе к концу вектора $w - v'$, чем конец вектора w (рис. 7а). Получаем противоречие. $\square$

Пусть теперь $c = \inf_{v' \in V} \|w - v'\|$; так как V замкнуто и $w \notin V$, имеем $c > 0$. Пусть $\{v_n\}$ — последовательность элементов из V , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w - v_n\| = c$; покажем, что эта последовательность фундаментальна. В самом деле, для любых $m, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим плоскость, порожденную векторами $w - v_m$ и $w - v_n$; согласно известному свойству параллелограмма («сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон») имеем

$$\begin{aligned} \|v_m - v_n\|^2 &= 2(\|w - v_m\|^2 + \|w - v_n\|^2) - 4\|w - (v_m + v_n)/2\|^2 \leq \\ &\leq 2(\|w - v_m\|^2 + \|w - v_n\|^2) - 4c^2 \end{aligned}$$

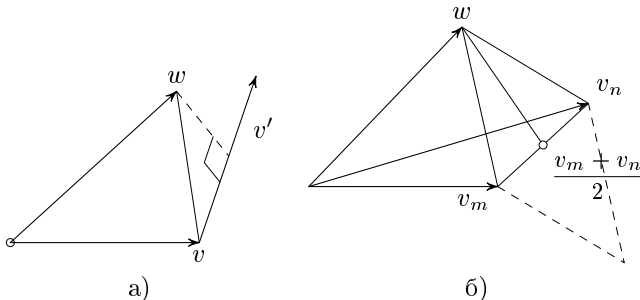


Рис. 7

(рис. 7б). Устремим m и n к бесконечности; тогда правая часть будет стремиться к нулю, откуда $\|v_m - v_n\| \rightarrow 0$, чем и установлена фундаментальность. Так как H полно, существует предел $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in V$, так что условие леммы выполнено. Тем самым доказано утверждение (2).

Утверждение (3) вытекает из (2) чисто формально. Именно, пусть $H = V \oplus V^\perp$; тогда включение $V \subset (V^\perp)^\perp$ очевидно из определения. Если же, напротив, $u \in (V^\perp)^\perp$, то $u = v + w$, где $v \in V$ и $w \in V^\perp$; по условию, $(u, w) = 0$; так как $(u, w) = (w, w)$, имеем $w = 0$, откуда $u \in V$. $\square$

Из неравенства Коши—Буняковского немедленно следует, что для всякого $w \in H$ отображение $v \mapsto (v, w)$ является непрерывным линейным функционалом на H : в самом деле, если $\|v_1 - v_2\| \leq \delta$, то

$$|(v_1, w) - (v_2, w)| = |(v_1 - v_2, w)| \leq \|v_1 - v_2\| \cdot \|w\| \leq \delta \|w\|.$$

Из доказанного предложения вытекает такое важное следствие.

Предложение 34.13. Пусть H — гильбертово пространство. Тогда всякий непрерывный линейный функционал на H имеет вид $v \mapsto (v, w)$ для некоторого $w \in H$.

Доказательство. Пусть $\lambda: H \rightarrow \mathbb{C}$ — ненулевой непрерывный линейный функционал, и пусть $V = \text{Ker } \lambda$. Тогда V — замкнутое подпространство коразмерности 1, так что из предложения 34.11 следует, что пространство $V^\perp \simeq H/V$ одномерно. Пусть w — какая-нибудь образующая пространства $V^\perp$; тогда отображение $v \mapsto (v, w)$ является линейным функционалом с ядром V ; стало быть, этот функционал пропорционален λ , так что существует такое $a \in \mathbb{C}$, что $\lambda(u) = a(u, w) = (u, \bar{a}w)$ для всех $u \in H$. Все доказано. $\square$

До сих пор у нас шла речь об абстрактных пространствах с мерой; сейчас мы докажем два полезных технических результата про $\mathbb{R}^n$ с

обычной мерой Лебега. Пространства L^1 и L^2 относительно этой меры будут обозначаться просто $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Обозначение 34.14. Через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем.

Предложение 23.1 показывает, что элементов в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ много; ясно, что каждый элемент $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, будучи непрерывной функцией с компактным носителем, лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 34.15. Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Докажем предложение для случая L^1 (случай L^2 полностью аналогичен). Мы воспользуемся методикой, которую во Франции называют «отвинчивание» (dévissage).

Именно, нам надо доказать, что всякую суммируемую функцию f можно с произвольной точностью аппроксимировать в L^1 -норме функцией из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что для этого достаточно с произвольной точностью аппроксимировать ее вещественную и мнимую части по отдельности; поэтому можно считать, что f вещественна.

Далее, всякая вещественная суммируемая функция f представляется в виде разности $f = f_+ - f_-$, где f_+ и f_- суммируемы и неотрицательны, и достаточно аппроксимировать уменьшаемое и вычитаемое по отдельности; поэтому можно считать, что f неотрицательна.

Пусть теперь f неотрицательна; согласно лемме 15.12 существует возрастающая последовательность неотрицательных простых функций¹ f_n , поточечно сходящаяся к f . По теореме Бешпо Леви имеем $\lim \int f_n dx = \int f dx$, откуда

$$\int |f - f_n| dx = \int (f - f_n) dx \rightarrow 0,$$

так что $f_n \rightarrow f$ в L^1 ; тем самым достаточно аппроксимировать каждую f_n , так что можно считать, что f — простая функция.

Далее, поскольку всякая простая функция является линейной комбинацией характеристических функций измеримых множеств, можно считать, что $f = \chi_E$ — характеристическая функция измеримого множества E . Заметим, что $E = \bigcup_k E_k$, где $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ и все множества E_k измеримы и ограничены; поэтому f является пределом монотонно возрастающей последовательности функций χ_{E_k} . Применяя то же

¹Напомним, что функция называется простой, если она измерима и принимает лишь конечное число значений.

рассуждение, что в предыдущем абзаце, получаем, что $\chi_{E_k} \rightarrow f$ в L_1 , так что достаточно аппроксимировать каждую χ_{E_k} . Стало быть, можно считать, что $f = \chi_E$ — характеристическая функция *ограниченного* измеримого множества E .

Если, наконец, f — характеристическая функция ограниченного измеримого множества E , то ввиду регулярности меры Лебега (теорема 16.15) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое ограниченное открытое множество $U \supset E$ и такое компактное множество $K \subset E$, что $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Как нетрудно проверить (у нас это утверждение было в задачах), для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $F_0, F_1 \subset \mathbb{R}^n$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая на F_0 тождественно равна нулю, на F_1 тождественно равна единице, и $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим такую функцию φ , положив $F_0 = \mathbb{R}^n \setminus U$ и $F_1 = K$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, причем $|\varphi(x) - \chi_E(x)| \leq 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $|\varphi(x) - \chi_E(x)| = 0$ при $x \notin U \setminus K$. Следовательно, $\|\varphi - \chi_E\|_1 \leq \varepsilon$; ввиду произвольности ε все доказано. $\square$

Второй из нужных нам технических результатов выглядит следующим образом.

Предложение 34.16. Пусть $f \in L^1(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, и пусть $\int f \varphi dx = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Тогда $f = 0$.

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условию предложения. Покажем, что $\int_E f dx = 0$ для всякого ограниченного измеримого множества E . Для этого заметим, что существуют убывающая последовательность ограниченных открытых множеств $\{U_m\}$ и возрастающая последовательность компактных множеств $\{K_m\}$, для которых

$$U_1 \supset \dots \supset U_m \supset \dots \supset E \supset \dots \supset K_m \supset \dots \supset K_1,$$

обладающие тем свойством, что $\mu(U_m \setminus K_m) < 1/m$ при всех m . Пусть, как и в доказательстве предложения 34.15, функция $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ равна единице на K_m и нулю вне U_m ; тогда последовательность $f \cdot \varphi_m$ сходится к $f \cdot \chi_E$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, так что по теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\int_E f dx = \lim \int_U f \cdot \varphi_m dx = 0,$$

что и утверждалось.

Из доказанного немедленно вытекает, что $\int_E f dx = 0$ и для любого измеримого множества E . Покажем, что для суммируемой f отсюда вытекает, что $f = 0$ почти всюду.

В самом деле, отделяя вещественную и мнимую часть, получаем, что достаточно проверить утверждение для вещественной f , а представляя вещественную f в виде разности $f(x) = \max(f(x), 0) - \max(-f(x), 0)$, получаем, что f можно считать неотрицательной; для таких функций искомое утверждение вытекает из леммы 34.5. $\square$

35. Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$: формула обращения

При изложении преобразования Фурье нам будет удобно немного модифицировать меру Лебега. Именно, следуя У. Рудину, обозначим через μ обычную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, деленную на $(\sqrt{2\pi})^n$, и в дальнейшем при любом интегрировании по $\mathbb{R}^n$ или его подмножествам будем подразумевать, что интегрирование производится по μ , если явно не указано иное. Мера μ на $\mathbb{R}^{m+n}$ будет произведением мер μ на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, так что теорема Фубини позволяет обычным способом сводить двойной интеграл к повторному. Разумеется, пространства L^1 и L^2 относительно этой меры — те же, что и относительно стандартной меры Лебега, и предложения 34.15 и 34.16 остаются в силе. Выбранная таким образом нормировка позволит нам избежать коэффициентов в некоторых формулах.

Если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — элементы $\mathbb{R}^n$, то через $\langle x, \xi \rangle$ мы будем обозначать «скалярное произведение» $x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ (следует представлять его как результат действия функционала ξ на вектор x). Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, то $D^\alpha f$ обозначает, как обычно, соответствующую частную производную функции f , а через x^α обозначается моном $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$, то через $\chi_\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ будет обозначаться отображение

$$\chi_\xi: x \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle}.$$

Это отображение является непрерывным гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ в группу комплексных чисел, по модулю равных единице (такие отображения называются *характерами* группы $\mathbb{R}^n$; можно показать, что всякий характер группы $\mathbb{R}^n$ имеет вид χ_ξ для некоторого ξ).

Определение 35.1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ее *преобразованием Фурье* называется функция $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, заданная формулой

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi_{-\xi}(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x).$$

(При более инвариантном изложении следует рассматривать $\hat{f}$ как функцию на векторном пространстве, двойственном к $\mathbb{R}^n$, а при еще бо-

лее инвариантном — как функцию на группе, состоящей из характеров группы $\mathbb{R}^n$.) Поскольку $|f(x)| = |f(x)\chi_{-\xi}(x)|$, в правой части формулы стоит интеграл от суммируемой функции, так что $\hat{f}(\xi)$ действительно определено для всех ξ . Иногда вместо $\hat{f}$ мы будем писать $f^\wedge$.

Перечислим простейшие свойства преобразования Фурье.

Предложение 35.2. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда выполнены следующие утверждения.

(а) $\hat{f}$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$; при этом $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ (так что функция $\hat{f}$ ограничена) и $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

(б) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ и $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{(\partial f / \partial x_k)} = i\xi_k \hat{f}$.

(в) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то частная производная $\partial \hat{f} / \partial \xi_k$ существует и $\widehat{(x_k f)} = i(\partial \hat{f} / \partial \xi_k)$.

Доказательство. Утверждение (а) очевидно: «модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля», а непрерывность функции $\hat{f}$ немедленно следует из теоремы об ограниченной сходимости.

Для доказательства утверждения (б) нам понадобится такая лемма.

Лемма 35.3. Если $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L^1(\mathbb{R})$, то $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Доказательство леммы. Так как f' непрерывна и суммируема, существует предел $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f'(x) dx$; так как $\int_0^a f'(x) dx = f(a) - f(0)$, существует и предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Если этот предел отличен от нуля, то $|f(x)| > \varepsilon > 0$ для всех достаточно больших x , что противоречит конечности интеграла $\int_{\mathbb{R}} |f| dx$. Аналогично обстоит дело с пределом при $x \rightarrow -\infty$. $\square$

Возвращаясь к пункту (б), запишем равенство

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \int dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \underbrace{\int \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_k}_I. \quad (35.1)$$

Интегрируя по частям, получаем, что

$$I = \lim_{A \rightarrow +\infty} (f e^{-i\langle x, \xi \rangle})_{-A}^A - \int_{\mathbb{R}} f \cdot (-i\xi_k) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_k,$$

причем первое слагаемое равно нулю по лемме. Подставляя в (35.1), получаем, что

$$\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} = i\xi_k \int dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \int f e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_k = i\xi_k \hat{f}(\xi),$$

что и требовалось.

Утверждение (в) формально получается дифференцированием под знаком интеграла в определении $\hat{f}$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \int f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \int f(x) \cdot (-ix_k) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx,$$

откуда все следует, если только такое дифференцирование законно. Его законность проверяется с помощью теоремы об ограниченной сходимости. Именно, если обозначить через $\hat{h} \in \mathbb{R}^n$ вектор, у которого k -я компонента равна h , а остальные равны нулю, то

$$\left| \frac{e^{-i\langle x, \xi + h \rangle} - e^{-i\langle x, \xi \rangle}}{h} \right| = \left| \frac{e^{ix_k h} - 1}{h} \right| \leq 2|x_k|;$$

поскольку, по условию, функция $x_k f$ суммируема, теорема об ограниченной сходимости применима и утверждение (в) доказано.

Осталось доказать, что $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. Для этого рассмотрим сначала случай $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Так как и сама f , и все ее частные производные лежат в $L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(L^n)$, из уже доказанного утверждения (б) вытекает, что для всякого k функция $\xi_k \hat{f}$ является преобразованием Фурье какой-то функции из L^1 и тем самым ограничена. Стало быть, $\hat{f}(\xi) = O(1/|\xi|)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, так что $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. Если теперь $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ произвольна, то ввиду предложения 34.15 существует последовательность функций $f_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$, сходящаяся к f в L^1 -метрике; по доказанному, все $\hat{f}_n$ стремятся к нулю на бесконечности, а ввиду пункта (а) последовательность $\hat{f}_n$ сходится к $\hat{f}$ равномерно. Значит, и $\hat{f}$ стремится к нулю на бесконечности. $\square$

Введем еще два обозначения. Пусть f — произвольная функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда через $\check{f}$ будем обозначать композицию f и центральной симметрии относительно начала координат (т. е. $\check{f}(x) = f(-x)$). Если $a \in \mathbb{R}^n$, то через $T_a f$ («сдвиг на a ») будем обозначать функцию $x \mapsto f(x - a)$.

Предложение 35.4. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ и A — невырожденная $(n \times n)$ -матрица, рассматриваемая как линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (левое умножение на вектор-столбец).

- (а) $(T_a f)^\wedge = \chi_{-a} \cdot \hat{f}$.
 (б) $(\chi_a \cdot f)^\wedge = T_a(\hat{f})$.
 (в) $(f \circ A)^\wedge(\xi) = \frac{1}{|\det A|} \hat{f}(A^{-1}\xi)$.

Доказательства, представляющие собой тривиальные упражнения на замену переменной, предоставляются читателю.

Следствие 35.5. (а) $(\hat{\hat{f}})^\wedge = \hat{f}$.

(б) Если $\lambda > 0$, то $(\widehat{f(x/\lambda)})(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$.

Определение 35.6. Пространством Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называется множество бесконечно гладких функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, обладающих следующим свойством: для всякого мультииндекса α и всякого $N > 0$ имеем $|D^\alpha f(x)| = O(|x|^{-N})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

(Случай нулевого мультииндекса не исключается, так что сама $f(x)$ также должна убывать на бесконечности быстрее любой степени $|x|$.) В определении, очевидно, можно было бы заменить O на o . Элементы пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называются *шварцевскими*, или *быстро убывающими*, функциями.

Предложение 35.7. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Из определения ясно, что $f \in L^1$ и, более того, $x^\alpha f \in L^1$ для всякого мультииндекса α ; применяя $|\alpha|$ раз утверждение (в) предложения 35.2, получаем, что функция $D^\alpha \hat{f}$ существует и непрерывна; тем самым доказано, что $\hat{f}$ бесконечно дифференцируема. Далее, если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то из формулы Лейбница очевидно, что $x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ для всякого мультииндекса β . Следовательно, для всякого мультииндекса α получаем (опять из предложения 35.2), что функция $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}$ является преобразованием Фурье суммируемой функции и тем самым ограничена; отсюда ясно, что $|D^\beta \hat{f}(\xi)| = O(|\xi|^{-N})$ для всякого $N > 0$. $\square$

Предложения 35.2 и 35.4 наводят на мысль, что между f и $\hat{f}$ имеется определенная симметрия. Эта симметрия составляет содержание так называемой теоремы (или формулы) обращения, к формулировке и доказательству которой мы сейчас переходим. Сначала докажем два вспомогательных утверждения: одно чисто техническое и одно содержательное.

Лемма 35.8 (техническая). Пусть $\varphi_n(x) = e^{-|x|^2}/2$. Тогда $\hat{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)$ для всякого x .

Доказательство. Разберем сначала случай $n = 1$. Ясно, что $\varphi = \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (так что функция $\hat{\varphi}$ также шварцевская и, в частности, бесконечно дифференцируемая), а также что выполнено тождество $\varphi'(x) = -xf(x)$. Из предложения 35.2 теперь вытекает, что $(\hat{\varphi})'(\xi) = -\xi\hat{\varphi}(\xi)$ для всех ξ . Стало быть, функции φ и φ' удовлетворяют одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению; более того, их значения в нуле совпадают (и равны единице): для φ это очевидно, а для $\hat{\varphi}$ вытекает из хорошо известного вычисления интеграла от e^{-x^2} по $\mathbb{R}$ (у нас оно было в задачах). Стало быть, $\hat{\varphi} = \varphi$ по теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Случай произвольного n немедленно следует из случая $n = 1$, так как переменные разделяются: $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_n)$. $\square$

Заметим, что доказанная лемма — единственное место, в котором мы явно используем выбор нормировки меры Лебега.

Предложение 35.9. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \cdot g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \hat{g} \, d\mu$$

(в частности, оба этих интеграла существуют в том смысле, что подынтегральные выражения суммируемы).

Доказательство. Применим теорему Фубини к двойному интегралу

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-i\langle x, \xi \rangle} d(\mu \times \mu). \quad (35.2)$$

Если обозначить подынтегральную функцию через $F(x, \xi)$, то для всякого x имеем $\int |F(x, \xi)| \, d\mu(\xi) \leq \|f(x)\| \|g\|_1$, откуда

$$\int d\mu(x) \int |F(x, \xi)| \, d\mu(\xi) \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty.$$

Стало быть, условия теоремы Фубини для интеграла (35.2) выполнены, так что два повторных интеграла существуют и совпадают. Совпадение этих интегралов как раз и составляет содержание предложения. $\square$

Теорема 35.10 (формула обращения). (а) Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\hat{\hat{f}} = \check{f}$. Подробнее:

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(\xi)$$

(обратите внимание на знак в показателе).

(б) Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ (равенство в пространстве L^1 , т. е. равенство функций почти всюду).

Доказательство. Докажем сначала часть (а). Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда, с учетом предложения 35.4, имеем

$$(\hat{\hat{f}})(a) = T_a \hat{f}(0) = (\chi_a \cdot \hat{f})(0) = (T_{-a} f)(0);$$

с другой стороны, по определению имеем $f(a) = (T_{-a} f)(0)$. Поэтому для доказательства формулы обращения для шварцевских функций достаточно доказать следующий ее частный случай:

$$\hat{\hat{f}}(0) = f(0), \quad \text{или} \quad \int \hat{f}(\xi) d\xi = f(0).$$

Положим теперь, как и в лемме 35.8, $\varphi(x) = \varphi_n(x) = e^{-|x|^2/2}$, и пусть $\lambda > 0$. Тогда ввиду предложения 35.9 и следствия 35.5 имеем

$$\int \hat{f}(x) \varphi(x/\lambda) dx = \lambda^n \int f(x) \hat{\varphi}(\lambda x) dx = \int f(\lambda^{-1}y) \varphi(y) dy$$

(во втором равенстве мы воспользовались тождеством $\hat{\varphi} = \varphi$ из леммы 35.8, а затем сделали замену переменной $\lambda x = y$). Устремим теперь λ к бесконечности; тогда левая часть, ввиду теоремы об ограниченной сходимости, будет стремиться к $\varphi(0) \int \hat{f}(x) dx = \int \hat{f}(x) dx$, а правая, по той же теореме, будет стремиться к $f(0) \int \varphi(y) dy = f(0)$. Тем самым утверждение (а) доказано. (Упражнение: что мешает с помощью этого же рассуждения доказать часть (б)?)

Для доказательства утверждения (б) запишем, для произвольной $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, следующую цепочку равенств:

$$\int \hat{\hat{f}} \cdot \psi dx = \int \hat{f} \cdot \hat{\psi} d\xi = \int f \cdot \hat{\hat{\psi}} dx = \int f \cdot \check{\psi} dx = \int \check{f} \cdot \psi dx$$

(последнее равенство очевидно, остальные вытекают из предложения 35.9 и уже доказанной первой части теоремы). Ввиду произвольности ψ все теперь вытекает из предложения 34.16. $\square$

36. Преобразование Фурье: дальнейшие свойства

Теорема Планшереля; свертка

Второе (наряду с формулой обращения) важнейшее свойство преобразования Фурье состоит в том, что оно однозначно продолжается до изометрического линейного отображения из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Вот точная формулировка.

Теорема 36.1 (теорема Планшереля). Преобразование Фурье, как линейный оператор из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, однозначно продолжается до непрерывного линейного оператора из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$; при этом $\hat{f} = \check{f}$ и $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Начнем со следующей тривиально проверяемой леммы.

Лемма 36.2. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $(\hat{f})^\wedge = (\check{f})^\vee$.

Из этой леммы и предложения 35.9 немедленно следует, что для $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int f \bar{g} dx = \int (\check{f})^\wedge \cdot \bar{g} dx = \int (\hat{f})^\vee \cdot (\bar{g})^\wedge d\xi = \int (\hat{f})^\vee \cdot (\bar{\hat{g}})^\vee d\xi = \int \hat{f} \cdot \bar{\hat{g}} d\xi,$$

так что $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g})$ (имеется в виду скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^n)$); в частности, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Ввиду предложения 34.15 пространство Шварца плотно в L^2 ; поскольку, как мы только что проверили, преобразование Фурье сохраняет L^2 -норму, оно сохраняет расстояния и тем самым равномерно непрерывно относительно L^2 -метрики. Теперь из предложения 10.9 немедленно вытекает, что преобразование Фурье однозначно продолжается для непрерывного отображения из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$; его линейность, свойство сохранения расстояний и выполнимость равенства $\hat{f} = \check{f}$ очевидны, так как все эти свойства имеют место на плотном подпространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Следствие 36.3 (равенство Парсеваля). Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad (\hat{f}, \hat{g}) = (f, g).$$

Если функция f лежит и в $L^1(\mathbb{R}^n)$, и в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то теперь мы имеем два разных определения ее преобразования Фурье $\hat{f}$: исходное (как в определении 35.1) и «по Планшерелю». Следующее предложение показывает, что эти два определения согласуются.

Предложение 36.4. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, то ее преобразования Фурье, найденные по определению 35.1 и по Планшерелю, равны почти всюду как функции на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из равенства Парсеваля и леммы 36.2 вытекает, что предложение 35.9 верно и для функций из L^2 и их преобразований Фурье в смысле Планшереля. Теперь обозначим через $\hat{f}_{\text{orig}}$ и $\hat{f}_{\text{Pl}}$ преобразования Фурье функции f , найденные по определению 35.1 и по

Планшерелю соответственно. Из предложения 34.16, в котором в качестве U выбираются всевозможные открытые шары в $\mathbb{R}^n$, вытекает, что достаточно показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{\text{orig}}(\xi) \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{\text{Pl}}(\xi) \psi(\xi) d\xi$$

для всякой $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. Однако же ввиду теоремы 35.10 функция $\hat{\psi} = \eta$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку всякая шварцевская функция лежит в L^2 , имеем

$$\int \hat{f}_{\text{orig}} \psi d\xi = \int f \hat{\psi} dx = \int f \eta dx = \int \hat{f}_{\text{Pl}} \psi d\xi,$$

что и требовалось. $\square$

С преобразованием Фурье тесно связана конструкция свертки функций.

Предложение-определение 36.5. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует интеграл

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy;$$

при этом функция $x \mapsto (f * g)(x)$, называемая *сверткой* функций f и g , также лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$; имеет место неравенство $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Доказательство. Все эти утверждения немедленно следуют из теоремы Фубини. Именно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x - y) g(y)| dx dy &= \int dy \int |f(x - y)| \cdot |g(y)| dx = \\ &= \int |g(y)| dy \underbrace{\left(\int |f(x - y)| dx \right)}_{\|f\|_1} = \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty \end{aligned} \quad (36.1)$$

(мы воспользовались тем, что мера Лебега инвариантна относительно сдвигов). Теперь утверждение о том, что $(f * g)(x)$ определено при всех x , немедленно вытекает из теоремы Фубини, а утверждение о том, что $f * g \in L^1$, вместе с неравенством $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$, сразу же получается из (36.1). $\square$

Основное утверждение о связи преобразования Фурье со сверткой выглядит так.

Предложение 36.6. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ (преобразование Фурье переводит свертку в произведение).

Доказательство. Это также непосредственно вытекает из теоремы Фубини:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} e^{-i\langle y, \xi \rangle} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, \xi \rangle} g(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} f(x-y) dx = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

(перестановка интегралов законна, так как ввиду (36.1) функция $f(x-y)g(y)$ суммируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). $\square$

Ряд Фурье как аналог преобразования Фурье

Теория преобразования Фурье на $\mathbb{R}^n$ является частным случаем общей теории, относящейся к произвольным локально компактным абелевым группам. Излагать эту теорию мы не будем, но расскажем (очень сжато), как с ее точки зрения выглядят ряды Фурье.

Обозначим через $\mathbb{T}$ группу (мультипликативную) комплексных чисел, равных по модулю единице; отображение $x \mapsto e^{ix}$, где $x \in \mathbb{R}$, задает изоморфизм этой группы с $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, и благодаря этому изоморфизму функции на $\mathbb{T}$ отождествляются с 2π -периодическими функциями на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\hat{\mathbb{T}}$ группу, состоящую из *характеров* группы $\mathbb{T}$, то есть непрерывных отображений из $\mathbb{T}$ в $\mathbb{T}$. Можно показать, что всякий характер группы $\mathbb{T}$ имеет вид $\chi_n: z \mapsto z^n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\hat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$ (ранее мы отмечали, что $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$). Напротив, всякий характер группы $\mathbb{Z}$ (рассматриваемой с дискретной топологией) полностью определяется образом элемента $1 \in \mathbb{Z}$ и тем самым имеет вид $n \mapsto z^n$ для некоторого фиксированного $z \in \mathbb{T}$; иными словами, $\hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}$. (Это частные случаи общего факта, называемого «двойственностью Понтрягина»: если G — локально компактная абелева группа, то $\hat{\hat{G}}$ канонически изоморфно G .)

Введем на $\mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}$ меры, инвариантные относительно сдвигов. Мера на $\mathbb{Z}$ будет бесхитростная: все подмножества измеримы, мера множества равна количеству его элементов. В качестве меры на $\mathbb{T}$ выберем меру Лебега, деленную на 2π ; аккуратнее говоря, если отображение $p: [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}$ задано формулой $x \mapsto e^{ix}$, то множество $E \subset \mathbb{T}$ назовем измеримым, если измеримо множество $p^{-1}(E) \subset \mathbb{R}$, а мерой множества $E \subset \mathbb{T}$ будем называть лебеговскую меру множества $p^{-1}(E)$ (обычную), деленную на 2π . Будем обозначать эту меру через μ . Ясно, что мера μ на $\mathbb{T}$ инвариантна относительно сдвигов и $\mu(\mathbb{T}) = 1$. Пространство бесконечно гладких функций на $\mathbb{T}$ плотно в $L^1(\mathbb{T}, \mu)$ и в $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ (доказательство предложения 34.15 проходит с тривиальными изменениями).

Нам еще понадобятся пространства $L^1(\mathbb{Z})$ и $L^2(\mathbb{Z})$; ясно, что первое из них — это пространство абсолютно сходящихся рядов, а второе — пространство рядов, у которых сходится ряд из квадратов модулей (внимание: члены рядов пронумерованы целыми числами, а не натуральными). Более традиционные обозначения для этих пространств — ℓ^1 и ℓ^2 соответственно.

Теперь для всякой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ определим ее преобразование Фурье — функцию $\hat{f}$. Это будет функция на группе характеров группы $\mathbb{T}$, то есть на $\mathbb{Z}$, задаваемая такой формулой:

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x) \chi_{-n}(x) d\mu(x);$$

если рассматривать f как 2π -периодическую функцию на $\mathbb{R}$, то

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Числа $\hat{f}(n)$ называются *коэффициентами Фурье* функции f .

Обратно, рассмотрим произвольную функцию из $L^1(\mathbb{Z})$, то есть абсолютно сходящийся ряд $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$; ее преобразованием Фурье назовем функцию $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \chi_n = \sum_n a_n e^{inx}$ (проявляя непоследовательность, мы определили преобразование Фурье в направлении «от $\mathbb{Z}$ к $\mathbb{T}$ » без знака «минус» перед характером, то есть элементом группы $\mathbb{T}$; для случая $\mathbb{R}^n$ это было бы преобразование $f \mapsto (\hat{f})^\vee$). Ввиду абсолютной сходимости ряда $\{a_n\}$ получаемая функция непрерывна на $\mathbb{T}$.

При исследовании свойств определенных таким образом преобразований Фурье нам будет удобнее начать сразу с L^2 -ситуации.

Заметим, во-первых, что $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ (см. задачу 3.40), так что специально определять преобразование Фурье на L^2 в данном случае не надо. Следующее утверждение является аналогом теоремы Планшереля для случая рядов Фурье (а также частным случаем общей теоремы Планшереля).

Теорема 36.7. *Отображение F , ставящее в соответствие функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ последовательность чисел $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, является изометрическим изоморфизмом из $L^2(\mathbb{T})$ на $L^2(\mathbb{Z}) = \ell^2$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $F(f) \in \ell^2$, то есть что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$ при $f \in L^2(\mathbb{T})$. Для этого заметим, что характеры χ_n образуют ортонормированную систему в L^2 : $(\chi_m, \chi_n) = 0$ при $m \neq n$ и $(\chi_n, \chi_n) = 1$ (проверка сводится к вычислению интегралов вида

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx$). Теперь для всякого натурального n обозначим через $V_n \subset L^2(\mathbb{T})$ подпространство, порожденное характерами χ_k при $|k| \leq n$; ввиду ортонормальности характеров пространство V_n изометрически изоморфно пространству $\mathbb{C}^{2n+1}$ со стандартной эрмитовой метрикой и тем самым полно; следовательно, V_n замкнуто в $L^2(\mathbb{T})$ (на самом деле замкнутым является всякое конечномерное подпространство в полном нормированном пространстве). Если теперь $f \in L^2(\mathbb{T})$, то обозначим через g ортогональную проекцию f на V_n ; поскольку $(g, \chi_j) = (f, \chi_j)$ при $|j| \leq n$, имеем $g = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \chi_k$; ввиду ортонормальности характеров имеем $\|g\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2$; с другой стороны, по построению $\|g\| \leq \|f\|$. Стало быть,

$$\sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty;$$

ввиду произвольности n отсюда вытекает, что $F(f) \in \ell^2$.

Итак, мы показали, что F — отображение из $L^2(\mathbb{T})$ в $L^2(\mathbb{Z})$. Построим теперь отображение $\Sigma: L^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$, которое окажется обратным к F . Именно, для каждой последовательности $a = \{a_n\} \in L^2(\mathbb{Z})$ положим $\Sigma(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \chi_n$, где сумма ряда рассматривается в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Надо проверить, что этот ряд сходится в $L^2(\mathbb{T})$; это вытекает из ортонормальности характеров, так как

$$\left\| \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} a_n \chi_n \right\|^2 = \sum_{N_1 \leq n \leq N_2} |a_n|^2$$

и $a \in L^2(\mathbb{Z})$.

Из того же вычисления вытекает, что Σ — изометрия, а из ортонормальности характеров ясно, что $F \circ \Sigma = \text{Id}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\Sigma(L^2(\mathbb{Z})) = L^2(\mathbb{T})$.

Чтобы в этом убедиться, заметим, что, коль скоро Σ — изометрия а $L^2(\mathbb{Z})$ полно, подпространство $\Sigma(L^2(\mathbb{Z})) \subset L^2(\mathbb{T})$ также полно и тем самым замкнуто; поэтому достаточно проверить, что $\Sigma(L^2(\mathbb{Z}))$ плотно в $L^2(\mathbb{T})$. Поскольку пространство $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на $\mathbb{T}$ плотно в $L^2(\mathbb{T})$, достаточно проверить, что пространство конечных линейных комбинаций характеров (такие комбинации называются тригонометрическими многочленами) плотно в $C(\mathbb{T})$ в L^2 -норме; наконец, поскольку из равномерной сходимости функций на $\mathbb{T}$ вытекает сходимость в L^2 -норме, достаточно проверить, что тригонометрические многочлены плотны в $C(\mathbb{T})$ в суп-норме. Существует не менее двух по-

учительных способов доказать этот факт (ключевые слова — «теорема Стоуна—Вейерштрасса» и «ядро Фейера»); предлагаем изучить эти доказательства самостоятельно по литературе. $\square$

В заключение приведем один из возможных аналогов формулы обращения преобразования Фурье.

Предложение 36.8. Если $f \in C^2(\mathbb{R})$ — периодическая функция с периодом 2π , то $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Будем рассматривать f как C^2 -функцию на $\mathbb{T}$. Заметим, что если f непрерывна (и вообще, если $f \in L^2(\mathbb{T})$), то $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$ (так как $\sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty$). Далее, если $f \in C^1(\mathbb{T})$, то $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$ (это проверяется тем же вычислением, что и предложение 35.26). Сопоставляя эти два обстоятельства, получаем, что если $f \in C^2(\mathbb{T})$, то $\hat{f}(n) = o(1/n^2)$, откуда вытекает, что ряд

$$\sum \hat{f}(n) \chi_n = \sum \hat{f}(n) e^{inx}$$

абсолютно и равномерно сходится к некоторой непрерывной функции f_1 ; поскольку равномерная сходимость на $\mathbb{T}$ влечет сходимость в L^2 -норме, так что этот ряд сходится к f_1 и в L^2 . Однако теорема 36.7 показывает, что это ряд сходится в L^2 -норме именно к f . Стало быть, $f_1 = f$ и все доказано. $\square$

37. Распределения, они же обобщенные функции

Формализм распределений (не следует их путать с распределениями в смысле лекции 33) дает возможность в определенных случаях дифференцировать негладкие функции; мы им воспользуемся, когда будем работать с эллиптическими уравнениями. Начнем с определений.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество. Через $\mathcal{O}(U)$ будем обозначать пространство C^∞ -функций на U , а через $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{O}(U)$, как и раньше — подпространство, состоящее из C^∞ -функций на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями, содержащимися в U .

Определение 37.1. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(U)$. Будем говорить, что $\{\varphi_n\}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, если выполнены следующие два условия:

- существует такой компакт $K \subset U$, что $\text{supp } \varphi_n \subset K$ при всех n ;
- для всякого мультииндекса α последовательность $\{D^\alpha \varphi_n\}$ сходится к $D^\alpha \varphi$ равномерно на K .

(Мультииндекс α может быть и «пустым», так что, в частности, последовательность $\{\varphi_n\}$ должна равномерно сходиться к φ .)

Определение 37.2. *Распределением на U называется линейный функционал $u: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющий следующему условию непрерывности: если $f_n \rightarrow f$ в смысле определения 37.1, то $u(f_n) \rightarrow u(f)$.*

Пространство распределений на U обозначается $\mathcal{D}'(U)$.

Ясно, что при проверке этого условия непрерывности достаточно убедиться, что $u(f_n) \rightarrow 0$, как только $f_n \rightarrow 0$.

На самом деле на пространстве $\mathcal{D}(U)$ можно ввести такую (неметризуемую) топологию, что сходимость последовательностей определения 37.1 будет равносильна сходимости в этой топологии, а непрерывность линейного функционала на $\mathcal{D}(U)$ относительно этой топологии будет равносильна «непрерывности» в смысле определения 37.2. Наконец, на пространстве $\mathcal{D}'(U)$ также можно ввести естественную топологию. Для наших скромных целей все это не потребуется.

По-английски и по-французски распределения называются distributions. По-русски их часто называют «обобщенными функциями».

Всякую бесконечно гладкую функцию f можно рассматривать как распределение на U , если сопоставить ей функционал на $\mathcal{D}(U)$, действующий по правилу $\varphi \mapsto \int_U f \varphi dx$. Более общо, очевидно, что всякая функция $f \in L^1(U)$ задает распределение, действующее по той же формуле $\varphi \mapsto \int_U f \varphi dx$. Предложение 34.16 показывает, что эти соответствия задают вложения $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ и $L^1(U) \subset \mathcal{D}'(U)$.

Далее, пусть μ — мера на U , определенная на σ -алгебре борелевских множеств и конечная на компактах. Тогда соответствие $\varphi \mapsto \int_U f d\mu$ также, очевидно, является распределением на U , так что всякую «не очень плохую» меру также можно рассматривать как распределение. В частности, для всякой точки $x \in U$ функционал $\delta_x: \varphi \mapsto \varphi(x)$ является распределением; это распределение называется *дельта-функцией, сосредоточенной в точке x* .

Обобщая в другом направлении, обозначим через $L^1_{\text{loc}}(U)$ (соотв. $L^2_{\text{loc}}(U)$) пространство классов измеримых функций $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ (с точностью до прибавления функции, равной нулю почти всюду), обладающих следующим свойством: для всякой точки $x \in U$ существует такая окрестность $V \ni x$, что $f|_V \in L^1(V)$ (напомним, что вертикальной чертой обозначается ограничение функции на подмножество). Ясно, что если $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$, то ограничение функции f на всякий компакт $K \subset U$ является суммируемой функцией; поэтому линейный функционал $\varphi \mapsto \int_U f \varphi dx$ является распределением на U ; далее, поскольку при

$\mu(V) < \infty$, имеем $L^2(V) \subset L^1(V)$, получаем, что $L^2_{\text{loc}}(U) \subset L^1_{\text{loc}}(U)$; тем самым имеем естественные вложения $L^1_{\text{loc}}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ и $L^2_{\text{loc}}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$. Наконец, поскольку, очевидно, $L^2(U) \subset L^2_{\text{loc}}(U)$, имеем и вложение $L^2(U) \subset \mathcal{D}'(U)$.

В дальнейшем всякую бесконечно гладкую функцию, всякий элемент пространства $L^1_{\text{loc}}(U)$ и пр. мы будем при необходимости рассматривать как распределение на U , не делая дальнейших оговорок.

Во всех приведенных до сих пор примерах распределения оставались бы непрерывными функционалами, даже если бы в пункте (б) определения 37.1 требовалась только равномерная сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$ (как говорят, это были распределения порядка 0). С помощью важной операции дифференцирования распределений можно получить примеры распределений высших порядков.

Перед тем как дать определение дифференцирования, проведем такое вычисление. Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \, dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_j} \, dx_1 \dots dx_n}_0 - \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \varphi \, dx_1 \dots dx_n \quad (37.1) \end{aligned}$$

(так как можно начать с интегрирования по x_j).

Этим мотивировано следующее определение.

Определение 37.3. Пусть $u \in \mathcal{D}'(U)$ и $1 \leq j \leq n$. Тогда через $\partial u / \partial x_j$ обозначается линейный функционал на $\mathcal{D}(U)$, заданный формулой

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} : \varphi \mapsto -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

То, что $\partial u / \partial x_j$ действительно является распределением, проверяется тривиально (и при этой проверке уже используется условие со сходимостью производных). Формула 37.1 показывает, что ограничение операции дифференцирования на подпространство $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ совпадает с дифференцированием в обычном смысле.

Итак, распределения являются обобщениями гладких функций (в частности, они тоже образуют векторное пространство), и распределения, как и гладкие функции, можно дифференцировать. Впрочем, полного счастья не бывает: определить произведение распределений так, чтобы оно обобщало произведение функций и обладало разумными свойствами, уже невозможно (см. задачу 3.59). Можно все же определить произведение функции на распределение. Это делается так.

Предложение-определение 37.4. Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$, $u \in \mathcal{D}'(U)$. Тогда линейный функционал $fu: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$, заданный формулой

$$fu: \varphi \mapsto u(f\varphi),$$

является распределением на U .

Это распределение называется произведением f на u . Если $u \in \mathcal{O}(U)$, то произведения fu в смысле этого определения и в традиционном смысле совпадают.

Доказательство. Чтобы установить, что fu — распределение, достаточно проверить, что если $\varphi_n \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(U)$, то $u(f\varphi_n) \rightarrow 0$, а для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что $f\varphi_n \rightarrow 0$, как только $\varphi_n \rightarrow 0$. Согласно определению 37.1, существует такой компакт $K \subset U$, что $\text{supp } \varphi_n \subset K$ для всех n . Ввиду формулы Лейбница, для всякого мультииндекса α существуют такие константы $C_{\beta\gamma}$, что

$$D^\alpha(f\varphi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta\gamma} D^\beta f D^\gamma \varphi,$$

и из этой формулы требуемая сходимости очевидна, так как $|D^\beta f|$ ограничено на K для всех β . $\square$

Тривиально проверяется, что операция умножения функции на распределение удовлетворяет всем приличествующим случаю законам ассоциативности и дистрибутивности (аккуратнее говоря, относительно этого умножения распределения образуют модуль над кольцом функций).

Очевидная проверка следующего утверждения предоставляется читателю.

Предложение 37.5. Если $f \in \mathcal{O}(U)$, $u \in \mathcal{D}'(U)$ и $1 \leq j \leq n$, то

$$\frac{\partial(fu)}{\partial x_j} = f \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u.$$

Иными словами, для произведения функции и распределения выполнена формула Лейбница.

Еще одна операция над функциями, которая обобщается на распределения, — это ограничение на открытое подмножество.

Именно, пусть $V \subset U$. Тогда естественное вложение $i: \mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$, «непрерывно» в том смысле, что сходящиеся в смысле определения 37.1 последовательности переходят в сходящиеся. Поэтому, если $u: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ — распределение, то $u \circ i: \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ — также распределение.

Определение 37.6. Пусть $V \subset U$ — два открытых множества и $u \in \mathcal{D}'(U)$. Тогда композиция $u \circ i$, где $i: \mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$ — естественное вложение, называется *ограничением* распределения u на подмножество V ; ограничение обозначается $u|_V$.

Ясно, что в случае, когда u — функция на U (гладкая, суммируемая и т. п.), ограничение $u|_V$ совпадает с ограничением $f|_V$.

Предложение 37.7. а) Пусть открытое множество V представлено в виде объединения открытых подмножеств $V = \bigcup V_j$. Если распределение $u \in \mathcal{D}'(V)$ таково, что $u|_{V_j} = 0$ для всех j , то $u = 0$.

б) Пусть открытое множество V представлено в виде объединения открытых подмножеств $V = \bigcup V_j$. Если для каждого V_j задано распределение $u_j \in \mathcal{D}'(V_j)$ таким образом, что $u_i|_{V_i \cap V_j} = u_j|_{V_i \cap V_j}$ для любых i и j , то существует и единственно такое распределение $u \in \mathcal{D}'(V)$, что $u|_{V_j} = u_j$ для всех j .

Аналогичные утверждения для функций очевидны. На техническом языке это предложение означает, что распределения образуют пучок.

Доказательство. а) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ и $K = \text{supp } \varphi$. Тогда компакт K содержится в конечном объединении $V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_k}$; из существования разбиения единицы вытекает, что $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_k$, где $\varphi_r \in \mathcal{D}(U)$ и $\text{supp } \varphi_r \subset V_{j_r}$ для всех r . Теперь имеем

$$u(\varphi) = \sum_{r=1}^k u(\varphi_r) = \sum_{r=1}^k (u|_{V_{j_r}}(\varphi_r));$$

так как все $u|_{V_{j_r}}$ равны нулю по условию, все слагаемые обращаются в нуль и $u(\varphi) = 0$; так как φ произвольна, все доказано.

б) Утверждение о единственности вытекает из пункта (а); докажем существование.

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(V)$; чтобы определить $u(\varphi)$, поступим следующим образом. Пусть $\text{supp } \varphi$ содержится в компакте $K \subset V$. Тогда, опять из существования разбиения единицы, получается, что существуют такие функции $\psi_1, \dots, \psi_k \in \mathcal{D}(V)$, что $\psi_1 + \dots + \psi_k = 1$ на K и при этом для всякого r найдется такой индекс j_r , что $\text{supp } \psi_r \subset V_{j_r}$. Положим теперь $u(\varphi) = \sum_{r=1}^k u_{j_r}(\psi_r \varphi)$.

Ясно, что если $\text{supp } \varphi_n \subset K$ для всех n и $\varphi_n \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(V)$, то $\psi_r \varphi_n$ стремится к нулю в $\mathcal{D}(V_{j_r})$ для всякого r , откуда $u(\varphi_n) \rightarrow 0$. Таким образом, чтобы проверить, что u действительно является распределением, остается только убедиться, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора K и φ_r . Сделаем это.

Пусть $\text{supp } \varphi$ содержится еще в компакте K' , и пусть существуют такие функции $\eta_1, \dots, \eta_l \in \mathcal{D}(V)$ и индексы $h_1, \dots, h_l$, что $\sum \eta_m = 1$ на K' и $\text{supp } \eta_m \subset V_{h_m}$. Для всяких $r \in [1; k]$ и $m \in [1; l]$ имеем по условию

$$u_{j_r}|_{V_{j_r} \cap V_{h_m}} = u_{h_m}|_{V_{j_r} \cap V_{h_m}},$$

откуда $u_{j_r}(\eta_m \psi_r \varphi) = u_{h_m}(\eta_m \psi_r \varphi)$. Имея это равенство в виду, запишем такую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k u_{j_r}(\psi_r \varphi) &= \sum_{r=1}^k u_{j_r} \left(\sum_{m=1}^l \eta_m \psi_r \varphi \right) = \sum_{r,m} u_{j_r}(\eta_m \psi_r \varphi) = \\ &= \sum_{r,m} u_{h_m}(\eta_m \psi_r \varphi) = \sum_m u_{h_m} \left(\sum_r \eta_m \psi_r \varphi \right) = \sum_{m=1}^l u_{h_m}(\eta_m \varphi). \end{aligned}$$

Этим доказана корректность.

Остается проверить, что $u|_{V_j} = u_j$, то есть что $u(\varphi) = u_j(\varphi)$, как только $\text{supp } \varphi \subset V_j$. Для этого положим $K = \text{supp } \varphi$, $r = 1$, а в качестве ψ_1 возьмем гладкую функцию с носителем, содержащимся в V_j , тождественно равную единице на K . Ввиду только что проверенной корректности определения u имеем $u(\varphi) = u_j(\psi_1 \varphi) = u_j(\varphi)$. $\square$

38. Пространства Соболева

Пункты (б) и (в) предложения 35.2 наводят на мысль, что чем более гладка функция на $\mathbb{R}^n$, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье (и обратно). Эти соображения можно доводить до точных утверждений разными способами; формализм пространств Соболева — один из них. На первый взгляд он выглядит несколько вычурно, но технически очень удобен.

Напомним, что если $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$, то $|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$.

Определение 38.1. Для всякого $s \in \mathbb{R}$ обозначим через μ_s меру на $\mathbb{R}^n$, определенную на σ -алгебре измеримых по Лебегу множеств и заданную формулой

$$\mu_s(E) = \int_E (1 + |\xi|^2)^s d\mu(\xi),$$

где μ , как и ранее — мера Лебега, деленная на $(2\pi)^{n/2}$.

Мера μ_s называется *соболевской мерой*. Ясно, что $\mu_0 = \mu$, и легко видеть, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ (см. доказательство предложения 34.15). Ясно также, что $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s) \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mu_t)$ при $s > t$.

Лемма 38.2. Если ψ — шварцевская функция на $\mathbb{R}^n$ и $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, то произведение $f\psi$ суммируемо относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^c d\mu(\xi) < \infty$ тогда и только тогда, когда $c < -n$ (см. задачу 3.34). Поскольку $(1 + |\xi|)^c \sim (1 + |\xi|^2)^{c/2}$ при $|\xi| \rightarrow +\infty$, получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s d\mu(\xi) < \infty \Leftrightarrow s < -n/2. \quad (38.1)$$

Пусть теперь $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$; по определению, это равносильно тому, что $f(\xi)(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Так как функция ψ шварцевская, существует такая константа $C > 0$, что $|\psi(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^{-s} \leq C \cdot (1 + |\xi|)^{-n/2-1}$. Следовательно, $\psi(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$; умножая на $f(\xi)(1 + |\xi|^2)^{s/2}$ и пользуясь тем, что произведение двух L^2 -функций суммируемо, получаем искомое. $\square$

Теперь всякой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ мы следующим образом сопоставим распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которое следует рассматривать как «преобразование Фурье» функции f : для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ положим (ориентируясь на формулу 35.9):

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} \cdot f d\mu. \quad (38.2)$$

Предложение 38.3. *Отображение, заданное формулой (38.2), корректно определено и является распределением.*

Доказательство. Поскольку $\hat{\varphi}$ — шварцевская функция, интеграл в правой части существует по лемме 38.2. Остается показать, что функционал u непрерывен в смысле определения 38.2. В самом деле, пусть $\{\varphi_m\}$ — сходящаяся к нулю последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, носители которых содержатся в компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку $\mu(K) < \infty$ и $D^\alpha \varphi_m \rightarrow 0$ равномерно на K для любого мультииндекса α , последовательность $D^\alpha \varphi_m$ сходится к нулю и в $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. Следовательно (см. предложение 35.2), для всякого мультииндекса α последовательность $\xi^\alpha \hat{\varphi}_m$ сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}^n$; отсюда следует, что и последовательность $(1 + |\xi|^2)^t \hat{\varphi}_m(\xi)$ равномерно стремится к нулю для всякого $t \in \mathbb{R}$. В частности, существует такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, что

$$(1 + |\xi|^2)^{-s/2+n/2+1} \hat{\varphi}_m(\xi) \leq \varepsilon_m$$

для всякого m и всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}_m(\xi) \cdot f(\xi)| &= |\hat{\varphi}_m(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \cdot f(\xi) \cdot (1 + |\xi|)^{s/2}| \leq \\ &\leq \varepsilon_m \cdot |f(\xi) \cdot (1 + |\xi|)^{s/2}| \cdot (1 + |\xi|^2)^{-n/2-1}. \end{aligned}$$

Так как в правой части этого неравенства оба непостоянных сомножителя лежат в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, правая часть суммируема относительно обычной меры Лебега; теперь равенство $\lim \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_m \cdot f = 0$ вытекает из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. $\square$

Распределение u , соответствующее функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ по формуле (38.2), будем обозначать через $\hat{f}$. Ясно, что если f — шварцевская функция, то $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ для всех $s \in \mathbb{R}$; предложение 35.9 показывает, что в этом смысле распределение $\hat{f}$, определенное формулой (38.2), совпадает с преобразованием Фурье функции f в обычном смысле. По этой причине распределение $u = \hat{f}$ будет называться преобразованием Фурье функции f . Напротив, ввиду формулы обращения функцию $\hat{f}$ естественно рассматривать как преобразование Фурье распределения u .

Предложение 38.4. *Линейное отображение $f \mapsto \hat{f}$ из $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является инъективным.*

Доказательство. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, и пусть $\int \hat{\varphi} \cdot f d\mu(\xi) = 0$ для всякой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; покажем, для начала, что $\int \hat{\psi} \cdot f d\mu(\xi) = 0$ для всякой шварцевской функции ψ . В самом деле, пусть функция $\eta_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ принимает значения из отрезка $[0; 1]$ и равна единице на шаре радиуса m с центром в начале координат. Тогда из теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что $\eta_m \psi \rightarrow \psi$ в L^1 -метрике (относительно обычной меры Лебега). Следовательно, последовательность $\widehat{\eta_m \psi}$ равномерно сходится к $\hat{\psi}$ (ввиду предложения 35.2а); поэтому $\int \hat{\psi} \cdot f d\mu(\xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \widehat{\eta_m \psi} \cdot f d\mu(\xi)$ опять-таки по теореме об ограниченной сходимости; так как каждая из функций $\eta_m \psi$ лежит в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, имеем по условию $\int \widehat{\eta_m \psi} \cdot f d\mu = 0$, так что $\int \hat{\psi} \cdot f d\mu = 0$. Так как преобразование Фурье отображает пространство Шварца на пространство Шварца, имеем $\int \lambda f d\mu = 0$ для всякой шварцевской функции λ и, в частности, для всякой функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $f = 0$. $\square$

Теперь мы можем определить пространства Соболева.

Определение 38.5. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда *пространством Соболева* $H_s \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется образ пространства $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ относительно отображения $f \mapsto \hat{f}$, заданного формулой (38.2).

Ясно, что $H_t \subset H_s$ при $t > s$.

Пространства H_s для неотрицательных s охарактеризовать совсем просто.

Предложение 38.6. При $s \geq 0$ пространство Соболева H_s состоит из преобразований Фурье (в смысле Планшереля) от функций из $L^2(\mu_s) \subset L^2(\mu)$.

Доказательство. Ввиду L^2 -изометричности преобразования Фурье предложение 35.9 остается верным, если $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а преобразование Фурье понимается в смысле Планшереля. Дальнейшее очевидно. $\square$

Если распределение u лежит в пространстве Соболева H_t , то, неформально говоря, следует считать, что u «тем более гладко», чем больше t . Сейчас мы приведем два точных результата, призванных подтвердить эти интуитивные представления. Первый из этих результатов показывает, что при достаточно больших t распределения $u \in H_t$ являются самыми настоящими гладкими функциями.

Предложение 38.7 (лемма Соболева). Пусть r — целое неотрицательное число, $s > r + (n/2)$ и H_s — пространство Соболева на $\mathbb{R}^n$. Тогда $H_s \subset C^r(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $u = \hat{f} \in H_s$, где $f \in L^2(\mu_s)$. Покажем, что $\xi^\alpha f \in L^1(\mu)$ для всякого мультииндекса α , удовлетворяющего условию $|\alpha| \leq r$. В самом деле, $|\xi^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|}$, откуда при $|\alpha| \leq r$ имеем $|\xi^\alpha| \leq C(1 + |\xi|^2)^{r/2}$ для некоторой константы C . Теперь запишем неравенства

$$|\xi^\alpha f| \leq C(1 + |\xi|^2)^{r/2} |f| = C(1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2} - \frac{s}{2}} \cdot |f|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.$$

В правой части первый сомножитель лежит в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ ввиду (38.1), а второй — поскольку по условию $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$. Стало быть, их произведение лежит в L^1 , и тем более это верно для $\xi^\alpha f$.

Поскольку в нашем случае $L^2(\mu_s) \subset L^2(\mu)$, предложение 38.6 в совокупности с примененным $|\alpha|$ раз предложением 35.2 (и с тем фактом, что для функций из $L^2 \cap L^1$ преобразования Фурье в исходном смысле и в смысле Планшереля совпадают — предложение 36.4), показывает, что функция $u = \hat{f}$ лежит в $C^r(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Еще одна характеристика пространств Соболева, также свидетельствующая о связи принадлежности к пространству Соболева и гладкости, относится только к пространствам H_r для целых положительных r .

Предложение 38.8. Пусть r — натуральное число. Тогда

$$H_r = \{f \in L^2(\mu) : D^\alpha f \in L^2(\mu) \text{ при } |\alpha| \leq r\}.$$

Доказательство. Пусть $u \in H_r$; тогда $u = \hat{f}$, где $f \in L^2(\mu_r) \subset L^2(\mu)$. Пусть α — произвольный мультииндекс. Тогда для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int f \cdot (\widehat{D^\alpha \varphi}) d\xi = (-i)^{|\alpha|} \int \xi^\alpha f \cdot \hat{\varphi} d\xi, \quad (38.3)$$

Если теперь $|\alpha| \leq r$, то $|\xi^\alpha|^2 = O(1 + |\xi|^2)^r$; поскольку $f \in L^2(\mu_r)$, отсюда следует, что $\xi^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, так что из (38.3) и равенства Парсеваля имеем

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-i)^{|\alpha|} \int (\widehat{\xi^\alpha f}) \varphi dx,$$

где преобразование Фурье понимается по Планшерелю; тем самым $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть, напротив, $D^\alpha u \in L^2$ при $|\alpha| \leq r$. Беря от $D^\alpha u$ преобразование Фурье, получаем, что $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2$ при $|\alpha| \leq r$. Поскольку

$$(1 + |\xi|^2)^r \leq \text{const} \cdot \sum_{|\alpha| \leq r} |\xi^\alpha|^2,$$

отсюда вытекает, что $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_r)$; теперь предложение 38.6 вкупе с формулой обращения показывает, что $u \in H_r$. $\square$

Вот еще одно совсем простое утверждение, также свидетельствующее о связи пространств Соболева с гладкостью.

Предложение 38.9. Если $u \in H_s$, то $\partial u / \partial x_j \in H_{s-1}$ для всякого j .

Доказательство. Если $u = \hat{f}$, где $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(\varphi) = -u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} (i \xi_j f) \cdot \varphi d\mu.$$

Осталось заметить, что если $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, то $\xi_j f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{s-1})$, поскольку $|\xi_j|^2 \leq 1 + |\xi|^2$. $\square$

Принадлежность к пространству H_s при данном s характеризует не одну только гладкость распределения: например, ненулевые константы, рассматриваемые в качестве распределений, вообще ни в одном пространстве H_s не лежат. Чтобы устранить этот недостаток, мы пространства Соболева локализуем. Эта конструкция основана на следующем факте.

Предложение 38.10. Если $u \in H_s$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi u \in H_s$.

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем, когда s — натуральное число. Тогда можно воспользоваться предложением 38.8.

По условию, $D^\alpha u \in L^2$ при $|\alpha| \leq s$; с другой стороны, ввиду формулы Лейбница при $|\alpha| \leq s$ имеем $D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta, \gamma} C_{\beta\gamma} D^\beta \varphi D^\gamma u$, где $|\gamma| \leq s$; поскольку произведение непрерывной функции с компактным носителем на функцию из L^2 принадлежит L^2 , имеем $D^\alpha(\varphi u) \in L^2$ при $|\alpha| \leq s$, и все доказано. $\square$

Теперь мы можем дать определение локальных пространств Соболева. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество. Если $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ и $u \in \mathcal{D}'(U)$, то произведение $\varphi \cdot u$ можно рассматривать как распределение на $\mathbb{R}^n$, если положить $(\varphi u)(\psi) = u(\varphi\psi)$ для всякой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (это частный случай конструкции «продолжение нулем распределения с компактным носителем»). Далее при необходимости мы будем рассматривать такие произведения как распределения на всем $\mathbb{R}^n$, не делая дополнительных оговорок.

Предложение-определение 38.11. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $u \in \mathcal{D}'(U)$ и $s \in \mathbb{R}$. Тогда следующие два условия эквивалентны.

а) Для всякой $x \in U$ существует открытое множество $V \ni x$, $V \subset U$ и такое распределение $w \in H_s$, что $w|_V = u|_V$.

б) Для всякой $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ имеем $\varphi u \in H_s$.

Если выполняются эти условия, то говорят, что распределение u локально принадлежит к H_s . Пространство распределений на U , локально принадлежащих к H_s , будем обозначать $H_{s, \text{loc}}$.

Доказательство. (б) $\Rightarrow$ (а). Для данной точки $x \in U$ рассмотрим функцию $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, тождественно равную единице на некотором открытом множестве $V \ni x$. Имеем $\varphi u \in H_s$, и при этом $\varphi u|_V = \varphi|_V \cdot u|_V = 1 \cdot u|_V = u|_V$.

(а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $\text{supp } \varphi = K$. Из условия (а) и существования разбиения единицы вытекает, что существуют такие открытые подмножества $V_1, \dots, V_m \subset U$, функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{D}(U)$ и распределения $w_1, \dots, w_m \in H_s$, что $K \subset \bigcup V_j$, $\text{supp } \varphi_j \subset V_j$ для всех j , $\sum \varphi_j = 1$ на K и $w_j|_{V_j} = u|_{V_j}$ для всех j . Теперь имеем $\varphi u = \sum (\varphi \cdot \varphi_j) \cdot u = \sum (\varphi \cdot \varphi_j) \cdot w_j$, и все $(\varphi \cdot \varphi_j) \cdot w_j$ лежат в H_s ввиду предложения 38.10. $\square$

Следствие 38.12. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, r — натуральное число и $\varepsilon > 0$. Тогда $C^r(U) \subset H_{r, \text{loc}}(U)$ и $H_{r+n/2+\varepsilon, \text{loc}} \subset C^r(U)$.

Доказательство. Второе включение следует из леммы Соболева, а первое — из 38.11 и предложения 38.8. $\square$

Отметим в заключение, что, строго говоря, мы определили пространства $H_{s, \text{loc}}$ только для натуральных значений s (поскольку только

для таких s мы доказали предложение 38.8); для доказательства основного результата следующей лекции этого достаточно.

39. Эллиптические операторы

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; всюду далее кольцо комплекснозначных C^∞ -функций на U будет иногда обозначаться не $\mathcal{O}(U)$, а просто $\mathcal{O}$.

Определение 39.1. *Дифференциальным оператором* называется линейное отображение $L: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, заданное формулой

$$L: f \mapsto \sum p_\alpha D^\alpha f,$$

где $p_\alpha \in \mathcal{O}$ и α пробегает все мультииндексы веса $\leq d$ для некоторого натурального d .

Например, всякое векторное поле является дифференциальным оператором.

Так же, как и в случае векторных полей, нетрудно проверить, что функции p_α однозначно определяются оператором L . Мы этого делать не будем; читатель ничего не потеряет, если будет считать дифференциальным оператором формальное выражение вида $L = \sum p_\alpha D^\alpha$, где $p_\alpha \in \mathcal{O}$.

Дифференциальные операторы в смысле определения 39.1 называются еще *скалярными* дифференциальными операторами; ниже мы определим также матричные дифференциальные операторы.

Определение 39.2. *Порядком* дифференциального оператора $L = \sum p_\alpha D^\alpha$ называется максимальное k , для которого существует не равный тождественно нулю коэффициент p_α , где $|\alpha| = k$.

Иными словами, порядок — это максимальный порядок дифференцирования, входящего в оператор. Например, всякое (ненулевое) векторное поле имеет как дифференциальный оператор порядок 1.

Ясно, что дифференциальные операторы порядка, не превосходящего данного числа k , образуют векторное пространство; будем обозначать его через D_k . В частности, $D_0 = \mathcal{O}$, а операторы порядка 0 суть операторы умножения на функцию.

Определение 39.3. Пусть $L = \sum p_\alpha D^\alpha$ — дифференциальный оператор порядка d . Тогда его *символом* называется многочлен $\text{Symb}(L) \in$

$\in \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, определяемый следующим образом:

$$\text{Symb}(L) = \sum_{|\alpha|=d} p_\alpha \xi^\alpha.$$

Кольцо $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ — это просто кольцо многочленов над кольцом гладких функций; хотя функции комплекснозначны, переменные ξ_j следует мыслить вещественными (см. ниже определение 39.12). Подчеркнем, что символ дифференциального оператора зависит только от слагаемых максимального порядка (в частности, символ всегда является однородным многочленом).

Чтобы освоиться с этими определениями, докажем следующий простой, но важный факт.

Предложение 39.4. а) *Композиция двух дифференциальных операторов также является дифференциальным оператором; если $L_1 \in D_{k_1}$, $L_2 \in D_{k_2}$, то $L_1 \circ L_2 \in D_{k_1+k_2}$.*

б) *Если $L_1 = \sum p_\alpha D^\alpha \in D_{k_1}$, $L_2 = \sum q_\beta D^\beta \in D_{k_2}$ и композиция $L_1 \circ L_2$ имеет порядок $k_1 + k_2$, то $\text{Symb}(L_1 \circ L_2) = \text{Symb}(L_1) \cdot \text{Symb}(L_2)$; порядок композиции $L_1 \circ L_2$ меньше $k_1 + k_2$ тогда и только тогда, когда произведение $\text{Symb}(L_1) \cdot \text{Symb}(L_2)$ тождественно равно нулю.*

в) *Если $L_1 \in D_{k_1}$, $L_2 \in D_{k_2}$, то коммутатор $[L_1, L_2]$ лежит в $D_{k_1+k_2-1}$.*

Утверждение (в) иллюстрируется тем известным нам обстоятельством, что коммутатор двух векторных полей является векторным полем.

Доказательство. Тот факт, что композиция двух дифференциальных операторов — также дифференциальный оператор, немедленно следует из формулы Лейбница. Далее, если $L_1 = \sum p_\alpha D^\alpha \in D_{k_1}$, $L_2 = \sum q_\beta D^\beta \in D_{k_2}$ и $\varphi \in \mathcal{O}$, то из той же формулы Лейбница немедленно вытекает, что

$$L_1(L_2(\varphi)) = \sum_{\substack{|\alpha|=k_1 \\ |\beta|=k_2}} p_\alpha q_\beta D^{\alpha+\beta} \varphi + \left(\begin{array}{c} \text{слагаемые с производными} \\ \text{меньшего порядка} \end{array} \right),$$

откуда вытекают утверждения (а) и (б). Наконец, (в) немедленно следует из (б) и коммутативности умножения многочленов. $\square$

Дифференциальные операторы можно рассматривать не только как отображения из $\mathcal{O}(U) = C^\infty(U)$ в себя. Например, если L — дифференциальный оператор порядка d , то L действует и на функциях из $C^m(U)$ для всякого $m \geq d$ и является тем самым линейным отображением из

$C^m(U)$ в $C^{m-d}(U)$; более того, поскольку распределения можно дифференцировать и умножать на гладкие функции, всякий дифференциальный оператор можно рассматривать и как отображение из $\mathcal{D}'(U)$ в $\mathcal{D}'(U)$. Наконец, если L — дифференциальный оператор и $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, то $L\varphi$ также, очевидно, имеет компактный носитель, так что можно рассматривать L и как оператор на $\mathcal{D}(U)$; сейчас мы воспользуемся этим обстоятельством.

Именно, определим на $\mathcal{D}(U)$ эрмитово скалярное произведение по обычной формуле

$$(f, g) = \int_U f \bar{g} d\mu$$

(разумеется, это не что иное, как ограничение на $\mathcal{D}(U)$ скалярного произведения, заданного на L^2).

Пусть теперь L — дифференциальный оператор на U ; будем рассматривать его как линейный оператор на $\mathcal{D}(U)$.

Предложение 39.5. *Оператор $L^*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{D}(U)$, сопряженный к L , является дифференциальным оператором; если*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq d} p_\alpha D^\alpha,$$

то

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq d} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \circ \overline{p_\alpha}. \quad (39.1)$$

Напомним, что если L — линейный оператор на пространстве V с эрмитовой метрикой $(\cdot, \cdot)$, то оператор L^* называется сопряженным к L , если $(Lu, v) = (u, L^*v)$ для всех $u, v \in V$. В правой части формулы (39.1) стоят композиции дифференцирований с операторами умножения на функцию.

Доказательство. Поскольку $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$ и $(L_1 \circ L_2)^* = L_2^* \circ L_1^*$, причем в обеих формулах левая часть существует, если существуют L_1^* и L_2^* , достаточно найти операторы, сопряженные к операторам умножения на функции и к операторам D^α . Ввиду равенства $f\varphi \cdot \bar{\psi} = \varphi \cdot \overline{f\psi}$, умножение на функцию $\bar{f}$ является оператором, сопряженным к оператору умножения на функцию f . Далее, если $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(U)$, то с помощью интегрирования по частям обычным образом получается тождество

$$\begin{aligned} \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \bar{\psi} dx_1 \dots dx_n &= - \int_U \varphi \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_n} dx_1 \dots dx_n = \\ &= - \int_U \varphi \cdot \overline{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right)} dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

так что оператор $-\partial/\partial x_j$ сопряжен к $\partial/\partial x_j$, откуда оператор $(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$ сопряжен к D^α . Отсюда немедленно следуют формула (39.1) и предложение. $\square$

Следствие 39.6. Если L — дифференциальный оператор порядка d , то L^* — тоже дифференциальный оператор порядка d ; при этом $\text{Symb}(L^*) = (-1)^d \overline{\text{Symb}(L)}$.

Черта над $\text{Symb}(L)$ обозначает комплексное сопряжение:

$$\overline{\sum f_\alpha \xi^\alpha} = \sum \overline{f_\alpha} \xi^\alpha.$$

Доказательство. Это немедленно следует из формулы (39.1). $\square$

Обобщением скалярных дифференциальных операторов являются матричные дифференциальные операторы.

Через $\mathcal{O}^k$, где k — натуральное число, будем обозначать прямую сумму k экземпляров пространства $\mathcal{O}$ (т. е. пространство наборов из k функций $f_1, \dots, f_k$); аналогичный смысл будут иметь обозначения $(\mathcal{D}(U))^k$, $(\mathcal{D}'(U))^k$ и т. п.

Определение 39.7. Линейный оператор $L: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^l$ называется (*матричным*) *дифференциальным оператором*, если существует такая $(l \times k)$ -матрица $\|L_{ij}\|$ из дифференциальных операторов в смысле определения 39.1, что

$$L(f_1, \dots, f_k) = \left(\sum L_{1j} f_j, \dots, \sum L_{lj} f_j \right).$$

В этом случае мы будем иногда писать $L = \|L_{ij}\|$.

Определения порядка и символа и простейшие свойства дифференциальных операторов выглядят в этом случае так.

Определение 39.8. Пусть $L = \|L_{ij}\|$ — матричный дифференциальный оператор из $\mathcal{O}^k$ в $\mathcal{O}^l$. Тогда его *порядком* называется максимум порядков операторов L_{ij} .

Если порядок оператора $L = \|L_{ij}\|$ равен d , то его *символом* называется $(l \times k)$ -матрица $\|P_{ij}\|$, состоящая из элементов кольца $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, где

$$P_{ij} = \begin{cases} \text{Symb } L_{ij}, & \text{если порядок } L_{ij} \text{ равен } d; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 39.9. а) Если $L_1: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^l$ — дифференциальный оператор порядка d_1 , а $L_2: \mathcal{O}^l \rightarrow \mathcal{O}^m$ — дифференциальный оператор порядка d_2 , то $L_2 \circ L_1: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^m$ — дифференциальный оператор порядка $\leq d_1 + d_2$. Если его порядок в точности равен $d_1 + d_2$, то

$\text{Symb}(L_2 \circ L_1) = \text{Symb}(L_2) \text{Symb}(L_1)$ (умножение матриц). Порядок композиции $L_1 \circ L_2$ меньше $d_1 + d_2$ тогда и только тогда, когда произведение $\text{Symb}(L_1) \text{Symb}(L_2)$ тождественно равно нулю.

Доказательства очевидны ввиду предложения 39.4.

Предложение 39.10. Если $L: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^l$ — дифференциальный оператор порядка d , и если $u \in H_{s, \text{loc}}(U)^k$, то $Lu \in H_{s-d, \text{loc}}(U)^l$.

Доказательство. Дифференцирование уменьшает номер пространства Соболева на единицу (предложение 38.9), а умножение на бесконечно гладкую функцию номера пространства Соболева не меняет (предложение 38.10). $\square$

Понятие сопряженного оператора в матричном случае выглядит следующим образом. Эрмитово скалярное произведение на $\mathcal{D}(U)^k$ задается формулой

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_k) = (\varphi_1, \psi_1) + \dots + (\varphi_k, \psi_k).$$

Матричный дифференциальный оператор, сопряженный относительно этого скалярного произведения, описывается так.

Предложение 39.11. Пусть $L: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^l$ — матричный дифференциальный оператор порядка d , заданный матрицей $\|L_{ij}\|$. Тогда оператор $L^*: \mathcal{O}^l \rightarrow \mathcal{O}^k$, заданный матрицей $\|L_{ji}^*\|$ (транспонированная матрица из сопряженных операторов) является сопряженным к L в том смысле, что

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi)$$

для всяких $\varphi \in \mathcal{D}(U)^k$ и $\psi \in \mathcal{D}(U)^l$.

Порядок оператора L^* равен d , и $\text{Symb}(L^*) = (-1)^d \cdot {}^t\overline{\text{Symb}(L)}$ (матрица, сопряженная к транспонированной), где для $P = \sum p_\alpha \xi^\alpha \in \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ полагаем $\bar{P} = \sum \bar{p}_\alpha \xi^\alpha$.

Доказательство с очевидностью вытекает из предложения 39.5 и следствия 39.6.

Приведем некоторые примеры.

Как мы уже отмечали, всякое векторное поле $\sum f_i(x)(\partial/\partial \xi_i)$ является дифференциальным оператором; если оно не является тождественным нулем, то его порядок равен 1, а символ равен $\sum p_i(x)\xi_i$.

Оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *оператором Лапласа*; его порядок равен 2, а символ равен $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$.

А вот пример ситуации, в которой естественно возникает матричный дифференциальный оператор. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение класса C^1 . Давайте выясним, при каких условиях для всякой точки $p \in \mathbb{C}$ производная $f'(p): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является не просто $\mathbb{R}$ -линейным, но комплексно-линейным отображением (иными словами, совпадает с умножением на некоторое комплексное число). Если записать $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, то якобиан отображения равен

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix};$$

с другой стороны, $\mathbb{R}$ -линейное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$ -линейным тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Поэтому наше условие на отображение $f = u + iv$ равносильно следующим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Коши—Римана*, а оператор, действующий по правилу

$$L: (u, v) \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

называется *оператором Коши—Римана*. Символ этого оператора имеет вид $\begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}$.

Из курса комплексного анализа вы узнаете, что всякая C^1 -функция, удовлетворяющая уравнениям Коши—Римана, является на самом деле комплексно-аналитической и тем самым бесконечно дифференцируемой; можно показать, что бесконечно дифференцируема и всякая C^2 -функция f , удовлетворяющая *уравнению Лапласа* $\Delta f = 0$. Иными словами, решения этих уравнений оказываются более гладкими, чем можно было бы ожидать a priori.

Конечно, это повышение гладкости имеет место не всегда. Например, если L — векторное поле, то функция, удовлетворяющая уравнению $Lf = 0$ (то есть постоянная на фазовых кривых) гладкой быть, конечно, не обязана. Еще один пример подобного рода дает «волновой оператор» $\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2$ на $\mathbb{R}^2$: если f — произвольная дважды дифференциру-

емая функция одного переменного, то функция $u: (x, t) \mapsto f(x + t)$ заведомо удовлетворяет «волновому уравнению»

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

«Теорема регулярности», которой завершается эта лекция и весь курс, выделяет важный класс уравнений с частными производными, для которых имеет место эффект повышения гладкости.

Определение 39.12. Дифференциальный оператор $L: \mathcal{O}^k(U) \rightarrow \mathcal{O}^l(U)$ называется *эллиптическим*, если его символ удовлетворяет следующему условию: для всякого $x \in U$ и всякого $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n \setminus (0, \dots, 0)$ умножение на матрицу $\text{Symb}_{x,\xi}(L)$ задает инъективное линейное отображение из $\mathbb{C}^k$ в $\mathbb{C}^l$, где через $\text{Symb}_{x,\xi}(L)$ обозначена матрица, получающаяся подстановкой в символ пары $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$.

В приведенных выше примерах операторы Лапласа и Коши—Римана являются, очевидно, эллиптическими, а волновой оператор, символ которого имеет вид $\xi^2 - \eta^2$, таковым не является. Не является эллиптическим и векторное поле (при $n > 1$).

Заключительный результат нашего курса — теорема 39.13, называемая ещё теоремой регулярности.

Теорема 39.13. Пусть $L: C^\infty(U)^k \rightarrow C^\infty(U)^l$ — эллиптический оператор порядка d и $u \in C^d(U)^k$. Если $Lu \in C^\infty(U)^l$, то $u \in C^\infty(U)^k$.

Следствие 39.14. Пусть $L: C^\infty(U)^k \rightarrow C^\infty(U)^l$ — эллиптический оператор порядка d и $u \in C^d(U)^k$. Если $Lu = 0$, то $u \in C^\infty(U)^k$.

Теорема 39.13 немедленно следует из следствия 38.12 и следующего более точного факта.

Предложение 39.15. Пусть $L: C^\infty(U)^k \rightarrow C^\infty(U)^l$ — эллиптический оператор порядка d , и пусть $u \in H_{t,\text{loc}}(U)^k$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Если $Lu \in H_{s,\text{loc}}(U)^l$, то $u \in H_{s+d,\text{loc}}(U)^k$.

Мы докажем это предложение при том упрощающем предположении, что в операторе L коэффициенты при D^α , для которых $|\alpha| = d$, являются константами (это равносильно тому, что элементы матрицы $\text{Symb}(L)$ лежат не в $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_d]$, а в $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_d]$).

Доказательство предложения. Сначала сведем все к случаю квадратных матриц, то есть к случаю $k = l$. Для этого покажем, что если L — эллиптический оператор, то эллиптическим будет и оператор $L^*L: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^k$. Именно, будем обозначить через $\text{Symb}_{x,\xi}$ матрицу, получающуюся подстановкой в символ пары $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$. Если

$A = \text{Symb}_{x,\xi}(L)$, то из предложения 39.11 вытекает, что $\text{Symb}_{x,\xi}(L^*) = (-1)^d \cdot {}^t \bar{A} =: A^*$. По условию, умножение на матрицу A является инвективным отображением; из этого вытекает, что квадратная матрица $(-1)^d A^* A$ невырождена. В самом деле,

$$A^* A v = 0 \Rightarrow (A^* A v, v) = 0 \Rightarrow (A v, A v) = 0 \Rightarrow A v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Теперь из предложения 39.9 немедленно следует, что порядок оператора $L^* L$ равен $2d$, а из невырожденности матрицы $A^* A$ вытекает, что этот оператор эллиптичен. Поэтому если $Lu \in H_{s,\text{loc}}$, то $L^* Lu \in H_{s-d,\text{loc}}$ по предложению 39.10. Если предположение доказано для эллиптических операторов из $\mathcal{O}^k$ в $\mathcal{O}^k$, то из него следует, что u лежит в пространстве Соболева с индексом $s - d + 2d = s + d$, что и требовалось.

Ввиду сказанного будем далее предполагать, что $L: \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{O}^k$. Пусть $u \in H_{t,\text{loc}}(U)^k$ и $Lu \in H_{s,\text{loc}}(U)^k$ (далее будем просто писать $H_{s,\text{loc}}$, $H_{t,\text{loc}}$ и т. п.). Ясно, что достаточно для всякой точки $x \in U$ найти такую окрестность V , что $u|_V \in H_{s+d,\text{loc}}$.

Для $x \in U$ зафиксируем какую-нибудь функцию $\varphi \in D(U)$, равную единице в некоторой окрестности $V \ni x$. Имеем $L(\psi u) - \psi Lu = [L, \psi]u$, где в правой части стоит коммутатор оператора L с оператором умножения на функцию ψ ; из формулы Лейбница ясно (ср. предложение 39.4в), что этот оператор имеет порядок $\leq d - 1$. Более того, $[L, \psi]$ — дифференциальный оператор с коэффициентами в $\mathcal{D}(U)$; их можно рассматривать как функции с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$, так что и $[L, \psi]$ также можно рассматривать как дифференциальный оператор на $\mathbb{R}^n$. Наконец, распределения ψu и ψv также будем рассматривать как распределения на $\mathbb{R}^n$ (см. предыдущую лекцию).

Имея все это в виду, заметим, что выполнено равенство

$$L(\psi u) = \psi L(u) + [L, \psi]u = \psi v + [L, \psi]u,$$

причем в правой части первое слагаемое лежит в H_s , а второе — в H_{t-d+1} . Следовательно, $L(\psi u) \in H_{\min(t-d+1, s)}$.

Лемма 39.16. $\psi u \in H_{\min(t+1, s+d)}$.

Вывод предложения из леммы. Будем последовательно применять лемму (всякий раз сужая окрестность V и выбирая новую функцию φ), пока $\psi u \in H_t$, где $t < s + d$. $\square$

Осталось доказать лемму 39.16. Для этого представим оператор L в виде $L = L_1 + L_2$, где L_1 — оператор, составленный из членов порядка d (ввиду нашего предположения, это оператор с постоянными коэффициентами), а L_2 — некоторый оператор порядка $\leq d - 1$.

Из формулы Лейбница следует, что

$$L_2(\psi u) = \sum_{j=0}^{d-1} \psi_j M_j u, \quad (39.2)$$

где $\psi_j \in \mathcal{D}(U)$ и M_j — некоторый (матричный $k \times k$) дифференциальный оператор на U , имеющий порядок j . Следовательно, все слагаемые в правой части (39.2) можно рассматривать как элементы $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)^k$, причем ввиду предложения 39.10 они лежат в H_{t-d+1} . Таким образом, $L_1(\psi u) \in H_{\min(t-d+1, s)} = H_\sigma$. Обозначим также $\psi u = w$.

Так как L_1 — оператор с постоянными коэффициентами, его символ (являющийся также символом оператора L) представляет собою $(k \times k)$ -матрицу p_{ij} из однородных многочленов степени d от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, причем если $w = (w_1, \dots, w_k) \in (H_t)^k$, где $w_j = \hat{f}_j$, $f_j \in L^2(\mu_t)$, то $L_1 w = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k)$, где $g_j = \sum p_{jr} f_r$.

Ввиду эллиптичности матрица $\|p_{ij}(\xi)\|$ невырождена при $\xi \neq 0$. Рассмотрим обратную к ней матрицу $\tilde{Q}(\xi) = \|q_{ij}(\xi)\|$; эта матрица состоит из однородных рациональных функций степени $-d$. Поскольку при всех $\xi \neq 0$ знаменатели в этих рациональных функциях отличны от нуля, верхняя грань

$$A = \sup_{\substack{|v|=1 \\ |\xi|=1}} \frac{|\tilde{Q}(\xi)v|}{|v|}$$

конечна; имеем, очевидно,

$$|Q(\xi)v| \leq A|\xi|^{-d}|v| \quad (39.3)$$

для всех $v \in \mathbb{R}^k$ и $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Положим теперь

$$Q(\xi) = \begin{cases} \tilde{Q}(\xi) & \text{при } |\xi| \geq 1; \\ 0 & \text{при } |\xi| < 1, \end{cases}$$

и пусть $r = Qg$, где $L_1 w = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k)$. Заметим, что $r_j \in L^2(\mu_{\sigma+d})$ для всех j . В самом деле, $r_j(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1$, а при остальных ξ имеем, ввиду (39.3):

$$|r_j(\xi)| \leq |r(\xi)| = |Q(\xi)g(\xi)| \leq A|\xi|^{-d}|g(\xi)| \leq k \cdot A|\xi|^{-d} \sum |g_j(\xi)|;$$

поскольку $\sum |g_j| \in L^2(\mu_\sigma)$, получаем, что $\hat{r} \in H_{\sigma+d}$; с другой стороны, ясно, что

$$f(\xi) - Q(\xi)g(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\xi| \geq 1; \\ f(\xi) & \text{при } |\xi| < 1. \end{cases}$$

Если обозначить вектор в правой части через $F = (F_1, \dots, F_k)$, то $F_j \in L^2(\mu_\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, так что $\hat{F} \in H_\lambda$ для всех λ . Стало быть, вектор w равен сумме вектора $\widehat{Q(\xi)g} = \hat{r}$, все компоненты которого лежат в $H_{\sigma+d}$, и вектора $\hat{F}$, все компоненты которого лежат вообще во всех H_λ . Тем самым $\psi u = w \in H_{\sigma+d} = H_{\min(t+1, s+d)}$, и все доказано. $\square$

В заключение скажем, что всю изложенную в этой лекции теорию можно обобщить с областей в $\mathbb{R}^n$ на произвольные многообразия; вы познакомитесь с этим обобщением в других курсах.

Задачи к третьему семестру

1. Многообразия

3.1. Покажите, что всякое связное многообразие линейно связно.

3.2. Покажите, что фундаментальная группа всякого многообразия не более чем счетна.

3.3. Обозначим однородные координаты на $\mathbb{RP}^2$ через $(x_0 : x_1 : x_2)$. Формула

$$\varphi: (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1 x_2)$$

задает отображение из $\mathbb{RP}^2 \setminus B$ в $\mathbb{RP}^2$, где $B \subset \mathbb{RP}^2$ — некоторое конечное множество (какое именно?). Найдите ранги отображения φ во всех точках из $\mathbb{RP}^2 \setminus B$.

3.4. Отображение $\varphi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^4$ задано формулой

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_0 x_2 : x_1 x_2 : x_2^2).$$

Найдите ранги отображения φ во всех точках $\mathbb{RP}^2$.

3.5. Пусть E — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $0 < k < l < \dim E$. Положим

$$F = \{(\alpha, \beta) \in G(k, E) \times G(l, E) : V_\alpha \subset V_\beta\}.$$

Покажите, что F — замкнутое подмногообразие в $G(k, E) \times G(l, E)$.

3.6. Пусть $0 < k < n$. Покажите, что множество вещественных $(n \times n)$ -матриц ранга k обладает естественной структурой гладкого многообразия.

3.7*. Докажите, что всякое гладкое связное одномерное многообразие диффеоморфно либо $\mathbb{R}$, либо окружности.

(Можно еще получить полную классификацию компактных двумерных многообразий, а в какой-то мере — и некомпактных; начиная с размерности три, задача полной классификации всех многообразий данной размерности становится трансцендентно сложной.)

2. Касательные векторы и векторные поля

3.8. На $\mathbb{RP}^2$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ зададим локальные координаты $(u_1, u_2) = (x_1/x_0, x_2/x_0)$, $(v_1, v_2) = (x_0/x_1, x_2/x_1)$ и $(w_1, w_2) = (x_0/x_2, x_1/x_2)$. Выразите векторные поля $\partial/\partial u_1$ и $\partial/\partial u_2$ в двух других координатных системах.

3.9. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ единичную сферу

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Точки $(0, 0, \pm 1)$ назовем полюсами. Рассмотрим на S^2 с удаленными полюсами векторные поля X и Y , заданные следующим образом. Поле X состоит из векторов длины 1, касательных к меридианам (в направлении с севера на юг), а поле Y состоит из векторов длины 1, касательных к параллелям (в восточном направлении).

а) Запишите поля X и Y , выбрав в качестве локальных координат широту и долготу.

б) Найдите коммутатор $[X, Y]$.

3.10. а) На единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ заданы следующие векторные поля X и Y . В поле X к точке (x_1, x_2, x_3, x_4) приложен вектор $(x_2, -x_1, x_4, -x_3)$, а в поле Y к той же точке приложен вектор $(x_3, x_4, -x_1, -x_2)$. Найдите коммутатор $[X, Y]$.

б) Тот же вопрос про векторы $(-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ и $(-x_3, x_4, x_1, -x_2)$.

3.11. а) На $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) рассмотрим векторное поле $X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$; существует ли на $\mathbb{R}^2$ непостоянная функция f , для которой $X_1 f = 0$?

б) Тот же вопрос для поля $X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

3.12. Пусть X — многообразие и $Y \subset X$ — его замкнутое подмногообразие (это обобщение понятия гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ — сформулируйте определение самостоятельно). Докажите, что если два векторных поля на X касаются Y , то и их коммутатор касается Y .

3.13. Постройте на нечетномерной сфере S^{2n+1} векторное поле, нигде не обращающееся в нуль (на четномерной сфере это, как известно, невозможно).

3.14. Обозначим через $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ естественное отображение, переводящее $(x_0, \dots, x_n)$ в $(x_0 : \dots : x_n)$. Для всякой вещественной $(n+1) \times (n+1)$ -матрицы $\|a_{ij}\|$ рассмотрим на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ векторное поле $V_A = \sum a_{ij} x_j (\partial/\partial x_i)$.

а) Покажите, что если $\pi(p) = \pi(q)$, то $\pi'(V_A(p)) = \pi'(V_A(q))$.

б) Ввиду пункта (а), поле V_A опускается до поля v_A на $\mathbb{RP}^n$. Опишите множество его нулей.

в) Найдите коммутатор полей v_A и v_B .

Подумайте также, как эта задача связана с задачей 3.13.

3. Фазовые потоки; разбиение единицы

3.15. Для каждого из векторных полей X и Y из задачи 3.9 выясните, задает ли это поле глобальный фазовый поток на сфере с двумя проколами; если таковой существует, записать его явно.

3.16. Решите на $\mathbb{R}$ дифференциальное уравнение $x' = x^k$ для всевозможных целых $k \geq 0$.

3.17. На $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$, состоящем из точек с однородными координатами $(1 : x : y)$, рассмотрим, для всякого целого $k \geq 0$, векторное поле $x^k \frac{\partial}{\partial x}$. Выясните, при каких k это поле продолжается на все $\mathbb{RP}^2$; в тех случаях, когда оно продолжается, выпишите соответствующий глобальный фазовый поток. (*Указание.* Суждение о непродолжаемости можно сделать, не переходя к новым координатам.)

3.18. Пусть X — связное гладкое многообразие, $p, q \in X$. Докажите, что существует диффеоморфизм $\varphi: X \rightarrow X$, переводящий p в q .

3.19. Пусть X — связное гладкое многообразие, и пусть $F_1, F_2 \subset X$ — его непересекающиеся замкнутые подмножества. Покажите, что существует гладкая функция $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ при всех $x \in X$, и при этом φ тождественно равна нулю на F_1 и тождественно равна единице на F_2 . (*Указание.* $(X \setminus F_1) \cup (X \setminus F_2)$ — открытое покрытие.)

3.20. Пусть X — гладкое многообразие и $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие. Докажите, что всякую гладкую функцию на Y можно продолжить до гладкой функции на X .

4. Плотности и дифференциальные формы

3.21. Убедитесь, что площадь сферы радиуса r действительно равна $4\pi r^2$.

3.22. Пусть $\gamma: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение с ненулевой производной. Положим $F(t, u) = \gamma(t) + u\gamma'(t)$, где $t \in (0; a)$ (образ этого отображения называется развертывающейся поверхностью). Предположим, что $F: (0; 1) \times (0; a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение. Покажите, что площадь поверхности $F((0; 1) \times (0; a)) \subset \mathbb{R}^n$ пропорциональна числу a^2 .

3.23. Положим $G = GL_n(\mathbb{R})$. Для $g \in G$ обозначим через $T_g: G \rightarrow G$ левое умножение на g .

а) Приведите пример ненулевой 1-формы на G , инвариантной относительно всех T_g (дифференциальная форма ω на X называется инвариантной относительно отображения $f: X \rightarrow X$, если $f^*\omega = \omega$).

б) Тот же вопрос для формы старшей степени на G .

3.24. Рассмотрим на $\mathbb{R}^3$ форму $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Обозначим через $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ сферу радиуса 1 с центром в начале координат.

а) В каких точках сферы S^2 форма $\eta = \omega|_{S^2}$ обращается в нуль?

б) Найдите $\int_{S^2} |\eta|$.

3.25. а) Покажите, что форма $dx \wedge dy$ на $\mathbb{R}^2$ инвариантна относительно всех вращений.

б) Инвариантна ли форма ω из задачи 3.24 относительно ортогональных преобразований? Если нет, то как она меняется при этих преобразованиях?

5. Дифференциальные формы (продолжение)

3.26. Пусть Y — подмногообразие в многообразии X , и пусть гладкая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ постоянна на Y . Покажите, что $(df)|_Y = 0$.

3.27. Пусть X — многообразие. Так как $\mathcal{T}_x X \cong (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$, имеем $\mathcal{T}_x^* X \cong \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$. Для гладкой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ опишите $(df)_x$ как элемент в $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$.

3.28. Пусть $\omega = dx + x dy$ — форма на $\mathbb{R}^2$.

а) Представима ли она (или хотя бы ограничение $\omega|_U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое подмножество) в виде dg , где g — гладкая функция?

б) Представима ли она (или хотя бы ограничение $\omega|_U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое подмножество) в виде $f dg$, где f и g — гладкие функции?

3.29. Пусть $\omega = dx + y^2 dz$ — форма на $\mathbb{R}^3$. Представима ли она (или хотя бы ограничение $\omega|_U$, где $U \subset \mathbb{R}^3$ — непустое открытое подмножество) в виде $f dg$, где f и g — гладкие функции?

3.30. Если ω — форма степени k и $v_1, \dots, v_k$ — векторные поля, то через $\omega(v_1, \dots, v_k)$ обозначается функция, значение которой в точке x равно $\omega_x((v_1)_x, \dots, (v_k)_x)$. Докажите, что если ω — форма степени 1, то

$$(d\omega)(v, w) = v\omega(w) - w\omega(v) - \omega([v, w])$$

(можно ли здесь обойтись без вычислений в координатах?).

3.31. Положим

$$G = \{x_0 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

(группа кватернионов с единичной нормой). Для $g \in G$ обозначим через $L_g : G \rightarrow G$ левый сдвиг на g ($T_g(s) = gs$). Дифференциальную форму ω на G будем называть инвариантной, если $L_g^*\omega = \omega$ для всех $g \in G$.

Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — инвариантные 1-формы на G , которые на касательном пространстве к единице имеют вид dx_1 (соотв. dx_2, dx_3).

а) Покажите, что существуют такие константы $c_{\alpha, \beta\gamma}$, что $d\omega_\alpha = \sum c_{\alpha, \beta\gamma} \omega_\beta \wedge \omega_\gamma$.

б) Найдите эти константы в явном виде.

6. Дифференциальные формы (окончание)

3.32. На $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$. Найдите какую-нибудь форму η , для которой $\omega = d\eta$.

3.33. Пусть $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Положим

$$\omega_p = \frac{(x-a)dy - (y-b)dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}).$$

Пусть $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение, для которого $\gamma(0) = \gamma(1)$; предположим, что $p \notin \gamma[0; 1]$.

а) Покажите, что $\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \omega_p$ — целое число (оно называется индексом кривой γ относительно p).

б) Пусть $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\gamma([0; 1]))$ — связное открытое множество. Покажите, что $\int_\gamma \omega_p$ один и тот же для всех $p \in U$.

3.34. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой метрикой. Зададим на $\mathbb{R}^n$ и S^{n-1} ориентацию стандартным образом, и пусть форма $\sigma \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$ ставит в соответствие всякому положительно ориентированному базису $e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathcal{T}_p S^{n-1}$ объем $(n-1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на $e_1, \dots, e_{n-1}$ (таким образом, σ — это «форма объема»).

а) Покажите, что

$$\sigma = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $x_1, \dots, x_n$ — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$.

б) Пусть отображение $\varphi: S^{n-1} \times (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ задано формулой $(u, r) \mapsto ru$ («сферические координаты»). Покажите, что

$$\varphi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = r^{n-1} p_1^* \sigma \wedge p_2^* dr,$$

где p_1 и p_2 — проекции на первый и второй сомножители.

в) Для каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $(1 + |x|)^\alpha$ суммируема на $\mathbb{R}^n$?

3.35. Найдите непосредственно из определения $H_{DR}^1(S^1)$.

3.36*. Найдите непосредственно из определения $H_{DR}^2(S^1 \times S^1)$.

3.37. Покажите, что дифференциальная форма степени k однозначно определяется своими интегралами по всем сингулярным k -симплексам.

3.38. Пусть B — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $\mathbb{R}^{2n}$; если $\mathbb{RP}^{2n-1}$ — проективизация нашего $\mathbb{R}^{2n}$, то всякой точке $x \in \mathbb{RP}^{2n-1}$, соответствующей ненулевому вектору $v \in \mathbb{R}^{2n}$, поставим в соответствие гиперплоскость $H_x \ni x$, являющуюся проективизацией пространства $\{y: B(x, y) = 0\}$.

Касательные пространства $\mathcal{T}_x H_x \subset \mathcal{T}_x \mathbb{RP}^{2n-1}$ образуют распределение на $\mathbb{RP}^{2n-1}$. Интегрируемо ли оно?

3.39. а) Покажите, что грассманиан $G(k, n)$ (k -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$) ориентируем при четном n .

б) Что происходит при нечетном n ?

7. L^1 , L^2 и преобразование Фурье

3.40. а) Покажите, что $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$, если $\mu(X) < \infty$.

б) Покажите, что, вообще говоря, $L^2(X, \mu) \not\subset L^1(X, \mu)$, если $\mu(X) = \infty$.

3.41. а) Покажите, что $L^1(\mathbb{R}^n)$ содержит счетное плотное подмножество.

б) Покажите, что $L^2(\mathbb{R}^n)$ содержит счетное плотное подмножество.

3.42. а) Покажите, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем) содержит подпространство конечной коразмерности, плотное в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

б) Покажите, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ содержит подпространство коразмерности 1, не являющееся плотным в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.43. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, причем $f_n \rightarrow f$ равномерно на $\mathbb{R}$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$. Следует ли из этого, что $f_n \rightarrow f$ в $L^1(\mathbb{R})$?

Напомним, что в принятых нами обозначениях

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{-i\langle x, t \rangle} dx_1 \dots dx_n.$$

В частности, преобразование Фурье от функции $e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)/2}$ равно $e^{-(t_1^2 + \dots + t_n^2)/2}$.

3.44. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$ на $\mathbb{R}$.

3.45. Пусть Q — симметрическая положительно определенная вещественная $(n \times n)$ -матрица. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-i x Q x}$ на $\mathbb{R}^n$ (где $x = (x_1, \dots, x_n)$ рассматривается как вектор-столбец).

3.46. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -1 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лежит ли $\hat{f}$ в $L^1(\mathbb{R})$?

3.47. а) Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Покажите, что $\hat{f}$ — вещественно-аналитическая функция.

б) Покажите, что обратное неверно: если $f \in L^1(\mathbb{R})$ непрерывна и $\hat{f}$ вещественно-аналитична, то носитель функции f не обязан быть компактным.

в) Пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\hat{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Покажите, что $f = 0$.

3.48. Докажите, что всякий непрерывный гомоморфизм из $\mathbb{R}^n$ в группу комплексных чисел, равных по модулю единице, имеет вид $x \mapsto e^{i\langle x, a \rangle}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$.

8. Ряды Фурье и прочее

3.49. Пусть $a, b > 0$. Найдите свертку функций $e^{-a|x|^2}$ и $e^{-b|x|^2}$ на $\mathbb{R}^n$ (не забудьте про нормировку меры Лебега!).

3.50. Так как преобразование Фурье, рассматриваемое как оператор на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, имеет порядок 4, его собственными значениями могут быть только ± 1 и $\pm i$. Все ли эти значения действительно реализуются?

3.51. Докажите, что сопоставление функции на $\mathbb{T}$ ее коэффициентов Фурье задает взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечно дифференцируемых функций и множеством последовательностей $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, для которых $|a_n| = O(|n|^{-K})$ при всяком $K > 0$.

3.52. а) Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

(«формула Пуассона»). (*Указание.* Положите $g(x) = \sum f(x + 2\pi n)$.)

б) Для $t > 0$ положим

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t}.$$

Докажите, что выполнено тождество

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \theta\left(\frac{\pi^2}{t}\right).$$

3.53. Пусть $f, g \in C^2(\mathbb{T})$, причем $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) = 0$ при $n < 0$.

а) Докажите, что для функции $h = fg$ также имеем $\hat{h}(n) = 0$ при $n < 0$.

б) Докажите, что для функции $u = e^f$ также имеем $\hat{u}(n) = 0$ при $n < 0$.

в*) Верны ли эти утверждения, если f и g всего лишь непрерывны на $\mathbb{T}$?

3.54. Пусть ряд Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ абсолютно сходится. Докажите, что он сходится к f в L^1 -метрике.

9. Распределения и пространства Соболева

3.55. а) Найдите производную функции $y = |x|$, рассматриваемой как распределение на $\mathbb{R}$. б) Найдите производную функции $y = [x]$, рассматриваемой как распределение на $\mathbb{R}$.

3.56. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)} \frac{\varphi(x) dx}{x}.$$

Покажите, что $u(\varphi)$ корректно определено и что соответствие $\varphi \mapsto u(\varphi)$ является распределением на $\mathbb{R}$; оно обозначается *v.p.* $(1/x)$.

3.57. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x) dx}{x + i\varepsilon}.$$

а) Покажите, что $u(\varphi)$ корректно определено и что соответствие $\varphi \mapsto u(\varphi)$ является распределением на $\mathbb{R}$ (оно обозначается $1/(x + i0)$).

б) Найдите формулу, связывающую v.p. $(1/x)$ и $1/(x + i0)$.

3.58. Найдите произведения (функции на распределение на $\mathbb{R}$) $(x^2) \cdot \delta$ и $(x^2) \cdot \text{v.p.}(1/x)$.

3.59. Покажите, что на аддитивной группе распределений нельзя ввести структуру коммутативного кольца таким образом, чтобы умножение гладкой функции на распределение совпадало с умножением в этом кольце.

3.60. а) Лежит ли дельта-функция в $\mathbb{R}^n$ в каком-нибудь пространстве Соболева? Если нет — докажите, если да — укажите, для каких именно s она лежит в H_s .

б) Тот же вопрос про функцию Хевисайда на $\mathbb{R}$ (так иногда называют характеристическую функцию луча $(0; +\infty)$). Если сейчас ответить не получится, вернитесь к этой задаче, когда познакомитесь с эллиптическими уравнениями.

в) Тот же вопрос про распределение

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \delta,$$

где δ — дельта-функция на $\mathbb{R}$ (иными словами, $u(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)$).

Экзамен за третий семестр

3.61. Пусть $\omega = x^3 dy - y^3 dx$ (дифференциальная форма на $\mathbb{R}^2$), и пусть $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая иммерсия. Покажите, что если $\int_{S^1} \gamma^* \omega = 0$, то γ не является вложением.

3.62. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задано стандартное положительно определенное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, и пусть $k \in (0; n)$ — целое число. Положим

$$X = \{(e_1, \dots, e_k) \in (\mathbb{R}^n)^k : (e_i, e_j) = \delta_{ij}\}.$$

а) Покажите, что X — связное гладкое многообразие; найдите его размерность.

б) Ориентируемо ли многообразие X ?

в) Покажите, что при $k > 1$ на многообразии X есть векторное поле без нулей.

3.63. Пусть $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое вложение, и пусть для всякой точки $p \in \gamma(S^1)$ задан ненулевой вектор $v(p) \in \mathbb{R}^n$, не касающийся кривой γ и гладко зависящий от p . Для данного $\varepsilon > 0$ положим

$$F_\varepsilon = \{p + tv(p) : 0 < t < \varepsilon\}.$$

а) Покажите, что существует такое $\tau > 0$, что F_ε является гладким многообразием при всех $\varepsilon < \tau$.

б) Пусть $\tau > 0.03$, а площади поверхностей $F_{0.01}$ и $F_{0.02}$ равны 0.2 и 0.5 соответственно. Найдите площадь поверхности $F_{0.03}$.

3.64. Пусть f — бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^3$ с компактным носителем. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

3.65. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ распределение u , действующее по правилу

$$u: \varphi \mapsto \iint_{\substack{-1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1}} \varphi(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2,$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. При каких $s \in \mathbb{R}$ распределение u лежит в пространстве Соболева H_s ?